UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

ANNALES
DE
L'INSTITUT FOURIER

(SUITE DES ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE,
SECTION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES)

PUBLIÉES AVEC LE CONCOURS
DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

TOME I-2

Année 1949/50

RÉDACTEURS

M. BRELOT et L. NÉEL

1950

SOMMAIRE

(*La reproduction des résumés ci-après est autorisée.*)

Pages.

ÉMILE COTTON (1872-1950). — Notice nécrologique.. 1

RENÉ GOSSE. — Sur une équation de Langmuir généralisée. . . . 5

Cet article posthume extrait de notes ou brouillons par E. Cotton concerne, pour les équations de la forme

$$y'' + y'p(x, y, y') + q(x)\frac{da(y)}{dy} = f(y),$$

la solution définie par les conditions initiales $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = 0$. Après avoir énoncé des hypothèses concernant les fonctions p, q, a, f, l'auteur montre que toute solution qui passe par un minimum pour $x = x_0$ reste supérieure à ce minimum pour $x > x_0$ et que, dans ces mêmes conditions, $|y|$ et $|y'|$ restent bornés. Enfin, lorsque p a une borne inférieure positive, y' tend vers zéro avec $1/x$ et y tend vers une limite l racine de $f(y) = 0$; c'est une généralisation d'un résultat concernant l'équation $y'' = f(y)$ si importante en mécanique.

ÉMILE COTTON. — Sur la représentation asymptotique du potentiel newtonien. 13

Le terme de rang l de la série donnant cette représentation est une forme linéaire de $2l + 1$ polynômes harmoniques inverses fondamentaux $A_{mnp}(m + n + p = l$; $p = 0, 1)$, fonctions des seules coordonnées du point potentié M. Les coefficients de cette forme ne dépendent que du système agissant ; pour une distribution de masses (l'auteur considère un système de points discrets ou de masses réparties d'une façon continue) ce sont des *moments* supérieurs *harmoniques* d'ordre l de la Géométrie des masses, expressions analogues aux moments et produits d'inertie où des polynômes harmoniques homogènes de degré l remplacent les carrés des distances ou leurs produits. Si le système agissant est formé de doublets (ou aimants élémentaires) le coefficient de A_{mnp} est la somme de trois moments harmoniques d'ordre $l - 1$. Dans le cas particulier de l'angle solide sous lequel on voit de M une courbe fermée, les moments harmoniques se calculent par des intégrales curvilignes prises e long de cette courbe. L'article se termine par une démonstration plus simple que celle de Sylvester concernant la représentation géométrique élégante des polynômes harmoniques inverses qu'avait énoncée Maxwell.

Colloque mathématique à Grenoble, (juin-juillet 1949). 27

FRÉDERIC RIESZ. — L'évolution de la notion d'intégrale depuis Lebesgue. 29

Conférence faisant un exposé historique, ayant en particulier l'intérêt d'éclairer les origines et l'influence de la contribution fondamentale et bien connue de l'auteur.

ALFRED RÉNYI. — Sur un théorème général de probabilité. 43

L'auteur généralise un théorème qu'il a déjà donné (J. de math. 28, 1949). Envisageant un champ de probabilités au sens de Kolmogoroff, il élargit puis étudie la notion de discrépance, en introduisant la discrépance $D_y(x)$ d'une variable aléatoire x par rapport à une autre variable aléatoire y ; elle se réduit au coefficient de corrélation si x et y sont des variables caractéristiques. Il introduit aussi la notion de suite de variables aléatoires « presque indépendantes deux à deux », avec un coefficient Δ dit module de dépendance. Il donne alors essentiellement pour une telle suite x_n l'inégalité

$$\sum_1^\infty D_y^2(x_n) \leqslant (1+\Delta)\left[1+\left(\frac{e(y)}{\sigma(y)}\right)^2\right]$$

où $e(y)$ est valeur probable, σ, écart moyen.

I. S. GAL. — Sur les moyennes arithmétiques des suites de fonctions orthogonales. 53

Soit $\{\varphi_\nu(x)\}$ une suite orthonormale dans l'intervalle $(-\infty < a \leqslant x \leqslant b < \infty)$. L'auteur démontre, que $\sum_{\nu=1}^{N}\left(1-\frac{\nu-1}{N}\right)\varphi_\nu(x) = o\left(N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et presque partout dans $a \leqslant x \leqslant b$. La démonstration est basée sur un théorème de MM. Gál et Koksma et on peut généraliser aussi pour le cas $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$ (théorème auxiliaire). En utilisant ce théorème auxiliaire on obtient tout de suite l'estimation connue pour les fonctions de Lebesgue (théorème 2) [voir Kaczmarcz et Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa, 1935, 577].

JEAN DIEUDONNÉ et LAURENT SCHWARTZ. — La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$. 61

L'objet du mémoire est l'extension des propriétés classiques des espaces de Banach à deux catégories d'espaces plus vastes, qui interviennent de manière essentielle dans la théorie des Distributions : les espaces $(\mathcal{F})$, qui sont définis comme les espaces localement convexes, métrisables et complets, et les espaces $(\mathcal{LF})$ qui s'obtiennent à partir des espaces $(\mathcal{F})$ par un processus de « limite inductive » : un tel espace est réunion d'une suite croissante (F_n) d'espaces $(\mathcal{F})$, muni de la topologie la plus fine induisant sur chacun des F_n sa topologie propre. Pour un tel espace E, on définit son *dual* E′ comme l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires x' continues dans E, et on pose $\langle x, x'\rangle = x'(x)$ pour $x \in E$, $x' \in E'$. Pour développer la théorie de la *dualité*, on munit E′ d'une topologie (dite topologie *forte*) définie de la façon suivante : un ensemble B dans un espace vectoriel topologique étant dit *borné* quand tout voisinage de 0 contient un homothétique de B (dans un rapport > 0 assez petit), la topologie forte sur E′ est la topologie de la convergence uniforme des formes linéaires dans tous les ensembles *bornés* de E. Il y a alors une dualité remarquable entre ensembles bornés et voisinages de 0 dans les deux espaces E et E′ : appelons *polaire* d'un ensemble $A \subset E$ (resp. $A' \subset E'$) l'ensemble $A^0 \subset E'$ (resp. $A'^0 \subset E$) formé des $x' \in E'$ (resp. $x \in E$) tels que $|\langle x, x'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in A$ (resp. tout $x' \in A'$) ;

alors les polaires des ensembles *bornés* dans E (resp. E′) sont les *voisinages de* o dans E′ (resp. E) et réciproquement. Grâce à cette propriété fondamentale, on peut développer, comme dans les espaces de Banach, les relations entre dualité forte et dualité faible, obtenir entre autres la condition pour qu'un espace ($\mathcal{F}$) ou ($\mathcal{LF}$) soit *réflexif* (c'est-à-dire identique au dual de son dual fort), étudier la dualité des sous-espaces et espaces quotients, et les fonctions linéaires et bilinéaires définies dans des espaces ($\mathcal{F}$) ou ($\mathcal{LF}$) ou dans leurs duals ; les résultats généralisent presque complètement les propriétés correspondantes des espaces de Banach.

Jacques DENY. — Systèmes totaux de fonctions harmoniques. . . . 103

L'auteur développe et complète une note sommaire sur l'approximation par des fonctions harmoniques (Bull. Soc. Math. de France 73, 1945). Considérons dans l'espace euclidien $R^m (m \geqslant 2)$ le point courant x à distance $|x|$ de l'origine, un compact E et la fonction harmonique fondamentale $h(x)$ valant $-\log|x| (m=2)$ ou $|x|^{2-m} (m>2)$. Si H_n est tout polynome harmonique homogène de degré n, on pose

$$\Phi_n^a(x) = \frac{H_n(x-a)}{|x-a|^{2n+m-2}} (n \geqslant 1),\ \Phi_0^a(x) = H_0 h(x-a) (H_0 = C^{te})$$

et $\Phi_n^\infty(x) = H_n(x) (n \geqslant 0)$. L'auteur caractérise de diverses manières la variété linéaire $\mathcal{M}$ des distributions de masse sur E dont le potentiel est nul sur CE ; il montre essentiellement que les fonctions finies continues sur la frontière $\overset{*}{E}$ de E orthogonales à $\mathcal{M}$ constituent la variété linéaire fermée engendrée par les $\Phi_n^{a_p}$ où $a_0\, a_1 \ldots a_p \ldots$ sont des points choisis respectivement dans les domaines composant CE. Il s'ensuit que les $\Phi_n^{a_p}$ forment un système total dans l'espace des fonctions finies continues sur $\overset{*}{E}$, si et seulement si CE n'est effilé en aucun point-frontière. Compléments divers.

Marcel BRELOT. — Compléments à la théorie de J. Deny. 113

Quelques autres démonstrations d'un point essentiel de la théorie précédente, mais surtout extension systématique de la théorie au cas de l'espace rendu compact par adjonction d'un point à l'infini $\mathcal{R}_m$. On raisonne sur un compact E qui peut alors contenir $\mathcal{R}_m$ et on utilise des potentiels-h_a où a joue le rôle de $\mathcal{R}_m$ pour le potentiel ordinaire, ce qui permet une étude générale plus symétrique. D'autres compléments sont donnés montrant dans un cas simple qu'il faudrait approfondir, la possibilité de réduire le système total de Deny.

Marcel BRELOT. — Étude des fonctions sous-harmoniques au voisinage d'un point singulier. 121

D'après le développement classique d'une fonction harmonique u de l'espace à τ dimensions au voisinage d'un point O (ce point exclu), on sait que la limitation de croissance en moyenne du type : $r^\lambda \mathcal{M}_{u^+}^r = o(r)$ ou $O(r) (\lambda > \tau - 2)$ entraîne la même limitation vraie pour u^+ (et même $|u|$) par disparition dans le développement des termes de croissance plus rapide. L'auteur avait montré (Act. sc. ind. n° 139, 1934) que ce passage de $\mathcal{M}_{u^+}$ à u^+ s'étend à u sousharmonique admettant une *majorante harmonique* (au voisinage de O, O exclu) ; il fait maintenant à peu près disparaître cette restriction de majoration harmonique et développe une étude analogue pour le voisinage du point à l'infini. Voici l'idée de la théorie pour $\tau = 3$. Supposons $r^s \mathcal{M}_{u^+}^r$ sommable en r voisin de o $(s > 0)$ et soit p le plus grand

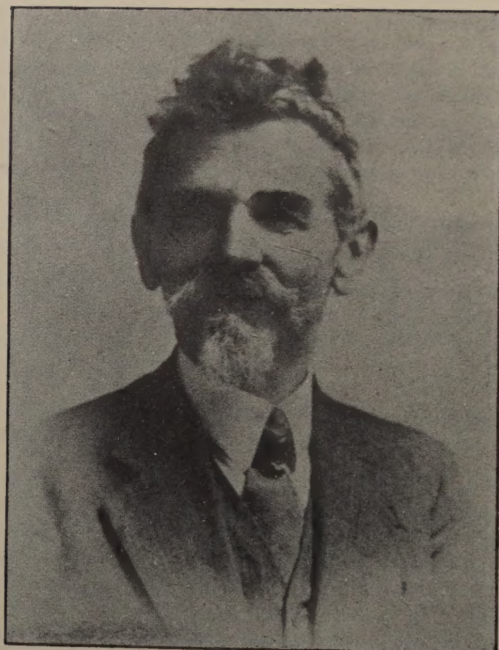
entier $< s$. On développe $1/\mathrm{MP}$ selon $\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{P}_n(\cos\gamma)\overline{\mathrm{OP}}^n/\overline{\mathrm{OM}}^{n+1}$, dont on prendra un Σ partiel pour former $v(\mathrm{M}) = \int\left(1/\mathrm{MP} - \sum_{n=0}^{p}\right)d\mu_{\mathrm{P}}$ (μ mesure associée à u). Grâce à une étude comparée de l'allure de u et μ, on verra que l'intégrale existe, que $\overline{\mathrm{OM}}^{1+s}v^{+}(\mathrm{M}) \to 0$ avec OM et que $r^{1+s}\mathfrak{M}^{r}_{(u-v)^{+}} \to 0$. De sorte que $u - v$ harmonique satisfait à cette même limitation vraie. On a ainsi une représentation intégrale dont on conclut que si $r^{1+\lambda}\mathfrak{M}^{r}_{u^{+}} \to 0$, $\overline{\mathrm{OM}}^{1+\lambda+\varepsilon}u_{-} \to 0$ ($\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$). On peut perfectionner et supprimer en particulier cet ε si λ est non entier ou si $\lambda = 1$. Ce cas de $\lambda = 1$ est traité et approfondi autrement, par la méthode, simple en principe, mais délicate, de passage à la limite dans une intersphère, sur la représentation de Riesz avec fonction de Green ; elle est inspirée d'un travail récent de Heins (Annals of math, 49) donnant une représentation intégrale de u sousharmonique dans le plan entier, avec des hypothèses que l'on améliore ici. Toute cette étude demande ou amène beaucoup de lemmes dont certains présentent de l'intérêt en eux-mêmes, en particulier des compléments sur le problème de Dirichlet.

R. GERBER. — Sur la réduction à un principe variationnel des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. 157

L'auteur présente une méthode de formation des équations de Navier pour un fluide visqueux incompressible. Il applique ses résultats à la démonstration de la non existence d'un principe variationnel pour le système de Navier lorsqu'on suit la masse du fluide dans son mouvement.

Louis NÉEL. — Preuves expérimentales du ferrimagnétisme et de l'antiferromagnétisme. 163

Les déterminations récentes du moment moléculaire à saturation d'un grand nombre de ferrites purs et de ferrites mixtes sont en accord complet avec la théorie du ferrimagnétisme antérieurement proposée par l'auteur, considérant ces corps comme des antiferromagnétiques imparfaits. D'autre part, l'étude de la structure des antiferromagnétiques par diffraction de neutrons prouve la décomposition de leur réseau cristallin en deux sous-réseaux de spin + et de spin —, postulée par la théorie. Enfin, la nature des surstructures ainsi déterminées confirme l'existence d'actions indirectes d'échange par l'intermédiaire des ions d'oxygène.



Émile COTTON

ÉMILE COTTON

(5 février 1872-14 mars 1950)

PAROLES PRONONCÉES PAR M. MORET,

Doyen de la Faculté des Sciences,

aux obsèques du professeur E. COTTON le 16 mars 1950.

A peine remise de l'émotion qu'elle avait éprouvée il y a quelques jours, lors de la mort subite de l'un de ses jeunes maîtres, Henri Tercinet, ingénieur-chimiste, notre Faculté des Sciences vient à nouveau d'être durement éprouvée par la disparition de son doyen d'âge et Professeur honoraire : Émile-Clément Cotton.

C'est dans la soirée du 14 mars qu'il s'est éteint doucement sans souffrances, à son domicile, après son labeur quotidien car l'heure de la retraite n'avait pas sonné pour lui celle de l'arrêt du travail.

Je l'avais même rencontré, il y a une semaine à peine, près de la Bibliothèque Universitaire où il se rendait, sa serviette professorale sous le bras, pour y consulter des revues utiles à ses recherches en cours.

Émile Cotton était l'indulgence et la modestie faites homme. Son aménité, sa douceur de caractère étaient presque proverbiales dans notre Maison, et je me souviens encore d'une séance du Conseil de la Faculté pendant laquelle, les discussions ayant été un peu vives, il s'était lui-même spontanément défini par cette phrase lapidaire qui nous avait tous frappés : Je suis passionnément modéré.

J'avais fait sa connaissance, il y a bientôt 28 ans, lors de mon arrivée à Grenoble, et le jeune Maître de Conférences intimidé que j'étais alors n'a jamais oublié la bonhommie et la bonté avec laquelle

il me reçut dans son petit bureau de la vieille Faculté, lors de mes visites protocolaires.

Il était né à Bourg en 1872, d'une vieille famille d'universitaires bressans. Son grand-père avait été, en effet, directeur de l'École normale d'instituteurs de Bourg et son père professeur de Mathématiques au collège de cette même ville, établissement où avait enseigné naguère le grand Ampère à ses débuts.

Une telle ascendance le prédestinait aux sciences exactes, aussi, après avoir passé par l'École normale supérieure, de 1891 à 1895 (année de l'agrégation), il fut successivement boursier de l'École des Hautes Études pendant deux années, puis professeur au lycée de Toulouse jusqu'en 1900, ayant entre temps passé sa thèse de doctorat en 1899.

C'est alors que se présenta l'occasion d'une carrière grenobloise sous forme d'une Maîtrise de conférences ; et dès 1904, il était titularisé dans la chaire de mécanique rationnelle et appliquée de notre Faculté qu'il occupa jusqu'à sa retraite, en 1942, et dans laquelle son lumineux enseignement a formé des générations d'ingénieurs et de professeurs.

Depuis son travail de thèse sur les variétés à trois dimensions, on peut dire que tous ses travaux mathématiques, qui lui valurent une si grande réputation, ont été conçus dans notre ville qu'il avait définitivement adoptée, toutefois sans jamais oublier son cher pays bressan et son Jura où il aimait à aller se retremper chaque année dans sa petite maison familiale de Chavanne-sur-Suran.

De son séjour à l'École Normale, il avait gardé le gout de tout ce qui touchait à ces grandes institutions, gloires de notre pays et, pendant de longues années, il mena de front sa tâche de professeur et de chercheur ainsi que celle combien assujettissante, d'examinateur d'admission aux Écoles Normale Supérieure, Navale et Polytechnique.

Ses travaux, dont de plus compétents que moi auraient pu vous exposer le déroulement logique, avaient de bonne heure attiré l'attention sur lui ; une notice leur sera consacrée dans les Annales de Mathématiques et de Physique de notre Faculté dont il était d'ailleurs un collaborateur fervent.

Les plus hautes distinctions en furent la récompense. Il fut en effet des premiers Directeurs de Recherches promus lors de la fondation du Centre national de la recherche scientifique tandis qu'il obtenait en 1933 le Grand Prix des Sciences mathématiques

et en 1936 le Prix Lasserre du Ministère de l'Instruction publique. Il était officier de la Légion d'Honneur.

L'Académie des Sciences se l'était attaché en qualité de correspondant dès 1931, puis de membre titulaire non résidant en 1943, consécration suprême d'une carrière de savant de province qui lui valut en outre la joie de siéger aux côtés de son frère, le grand physicien Aimé Cotton.

Tant de titres n'avaient point altéré son caractère, si simple et si droit, et c'est avec une infinie tristesse que la Faculté des Sciences voit disparaître l'un de ses maîtres les plus vénérés et surtout l'un de ceux qui lui étaient restés le plus attachés, poussant même le dévouement jusqu'à venir parfois assister à nos réunions académiques.

Émile Cotton avait aussi le culte de la famille qui, d'ailleurs le lui rendait bien, et son plus grand bonheur était de vivre au milieu des siens en assistant à l'éclosion de leur propre bonheur.

Une de ses dernières grandes joies aura été le succès de la remarquable thèse de physique de son fils Pierre et sa nomination de Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Marseille.

A Madame Émile Cotton, à tous ses enfants, à son frère Monsieur Aimé Cotton, j'ai l'émouvante mission d'adresser ici, près de ce cercueil qui va bientôt rejoindre la terre natale jurassienne, l'expression de notre grande affliction et de nos respectueuses condoléances.

LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE E. COTTON

Si, malgré leur importance, ils ne comprennent que deux ouvrages, un fascicule du mémorial des Sciences mathématiques et un cours de mécanique, par contre 70 articles environ s'échelonnent depuis 1896 jusqu'à maintenant, le dernier paraissant ci-après à côté d'une note que le professeur Cotton avait pu extraire des papiers de R. Gosse. Nous allons situer les principaux domaines de recherche en renvoyant à quelques mémoires importants qui fourniraient la bibliographie détaillée pour chaque sujet.

Dans sa thèse (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1899), E. Cotton étudie pour les espaces de Riemann à 3 dimensions le problème de l'application et celui encore non abordé de la correspondance conforme, problèmes bien connus pour deux dimensions. La correspondance

conforme n'est pas possible en général ; il en caractérise les cas d'existence en les ramenant à un problème d'application. On sait quelle importance allait prendre plus tard la théorie des espaces de Riemann avec les travaux de Levi-Civita, Einstein, E. Cartan.

En liaison avec sa thèse viennent des recherches sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre où il opère une classification et obtient le résultat devenu classique qu'avec trois variables, on ne peut en général par un changement de variables se ramener à des coefficients constants pour les termes du second ordre : il en précise les conditions de possibilité (Voir surtout Annales École N. S. 17, 1900).

Il étudie les mouvements d'un solide à p paramètres, résoud le problème de Koenigs de trouver les cas où les « vis principales d'inertie » sont fixées par rapport au solide, et généralise beaucoup (Annales Univ. de Grenoble 1904) la théorie du trièdre mobile de Darboux, dont E. Cartan devait faire par la suite l'importante méthode du repère mobile. Il s'en sert en particulier pour approfondir après Hadamard le pivotement des surfaces (Annales Univ. Grenoble 1908).

Il ouvre un chapitre nouveau en cherchant à évaluer l'erreur dans les solutions approchées des systèmes d'équations différentielles et applique sa méthode d'estimation d'un « domaine de sécurité » au pendule de Foucault (Ann. Univ. Grenoble 1909). Il est ainsi amené à perfectionner la méthode des approximations successives puis à développer une théorie bien plus étendue en passant à un système d'équations intégrales (fascicule 28 du mémorial des Sc. math., 1928).

Il perfectionne la théorie des nombres caractéristiques de Liapounoff et obtient des rapprochements intéressants entre certains points de la théorie des séries entières et des équations différentielles (Annales École N. S. t. 36).

Certains problèmes de mécanique posent l'étude d'intégrales dépendant d'un paramètre dans la fonction et dans le champ d'intégration. Tel est l'exemple des corps flottants (Ann. École N. S. 49, 1932). Cela l'amène à une étude importante, par plusieurs méthodes, dans le domaine complexe, d'intégrales qu'il appelle abéloïdes, analogues aux intégrales abéliennes dépendant d'un paramètre, mais où les polynomes sont remplacés par des séries entières (Voir Ann. E. N. S. t. 50, 52, 60).

En mécanique enfin, à côté de travaux didactiques, il approfondit la réciproque difficile du théorème sur la stabilité (Annales E. N. t. 30, 1913) en supprimant des restrictions qui avaient arrêté Painlevé et perfectionne la théorie de l'équilibre des corps flottants (Annales Soc. pol. de math. t. 15, 1926 ; J. de math. t. 7, 1928). Il étudie la formule de Bernoulli au point de vue de l'hydraulique pour en faire des applications à la théorie des moteurs hydrauliques (Ann. Univ. Grenoble 1925). Il fait une théorie des nappes fermées de Savart (Ann. Univ. Lyon 1941) qu'il exposait, il y a quelques années, au cours d'une réunion du groupe rhodanien de la Société mathématique de France, groupe qu'il avait contribué à créer en rapprochant ainsi de Grenoble, Lyon, Genève et Lausanne. Enfin c'est à la mécanique encore que se rapportent les derniers travaux parus, comme certains rapprochements entre la géométrie des espaces de Riemann et la mécanique rationnelle (Bull. Soc. Math. de France 76, 1947) et un article améliorant les critères de stabilité de Routh et Hurwitz et utile pour l'ingénieur (Bull. Soc. Math. 1948, en collaboration avec M. Ma Min Yuan).

SUR UNE ÉQUATION DE LANGMUIR GÉNÉRALISÉE

par René GOSSE †.

Cet article est extrait d'un manuscrit que rédigeait M. Gosse avant sa mort tragique. Le manuscrit, comportant de nombreuses ratures ou retouches, ne constituait évidemment qu'une rédaction provisoire ; le début seul en a pu être publié. Il a fallu laisser de coté tout ce qui concernait des développements en série des solutions des équations différentielles étudiées ou des applications numériques. De plus, n'ayant pas réussi à reconstituer la démonstration que M. Gosse voulait donner de la proposition qu'il énonçait au début du n° 3, j'ai cru devoir proposer celle qui est indiquée entre crochets ; elle repose d'ailleurs sur les inégalités établies aux n^{os} 1 et 2.

(E. Cotton.)

Introduction. — MM. Rocard et Warnecke, dans la *Revue Scientifique* (mars 1939) ont proposé une intéressante étude d'une équation de M. Langmuir dont ils ont généralisé la forme. Ils l'écrivent

$$r\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{dV}{dr}=2i\left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{2}}\left[V-\frac{2e}{m}\left(\mathrm{I}\log\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

le changement de variables

$$r=r_0\mathcal{E}^{\frac{3x}{2}},\qquad V=\lambda^2u\mathcal{E}^x+\frac{9}{2}\frac{e}{m}\mathrm{I}^2x^2$$

λ étant une constante, $\mathcal{E}$ la base des logarithmes népériens, la ramène à l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}+u+h\mathcal{E}^{-x}=ku^{-\frac{1}{2}}$$

h et k sont des constantes positives dont il est inutile de donner l'expression ; cette équation peut aussi s'écrire en posant $y = u\mathcal{E}^x$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + h = k\mathcal{E}^{\frac{3x}{2}} y^{-\frac{1}{2}}.$$

Pour déterminer la solution $V(r)$ qui pour $r = r_0$, c'est-à-dire pour $x = 0$, s'annule ainsi que sa dérivée, il suffit de trouver la solution u ou y des équations (1) ou (2) définie par les mêmes conditions initiales.

1. Nous étudions ici quelques propriétés générales des équations de la forme

$$(3) \qquad y'' + y'p(x, y, y') + q(x)\frac{da(y)}{dy} = f(y)$$

(dont (1) et (2) sont des cas particuliers) concernant la solution qui est définie par les conditions initiales

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad y' = 0.$$

Nous supposerons $x \geq x_0$ et nous ferons sur p, q, a et f les hypothèses suivantes :

1° p est positif ou nul, borné supérieurement.

2° On a $0 \leq \frac{da}{dy} < A$, $\left|\frac{d^2a}{dy^2}\right| < A'$, A et A′ étant deux constantes positives et q est positif non croissant et tend, quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, vers une limite finie qu'on peut toujours supposer nulle en modifiant convenablement $f(y)$.

3° Nous supposerons que y commence par croître. En particulier il en sera ainsi si $f(y_0) - q(x_0)\left(\frac{da}{dy}\right)_0$ est positif. Si cette expression était nulle, il suffirait que $q'(x_0)$ ne soit pas nul et que $\left(\frac{da}{dy}\right)_0$ soit positif pour que notre hypothèse soit vérifiée.

4° $f(y)$ est continue pour toute valeur de y, sauf peut-être pour $y = y_0$ et $F(y) = \int_{y_0}^{y} f(y)\,dy$ a un sens et s'annule pour une valeur au moins Y de y supérieure à y_0. D'après notre troisième hypothèse, $f(y_0)$ est toujours positif, la quatrième implique que $f(y)$ change de signe un nombre impair de fois entre y_0 et Y.

Nous sommes assurés que ces conditions ne sont pas contradictoires puisqu'elles sont vérifiées par l'équation (1) de Langmuir.

2. Nos quatre hypothèses ont des conséquences immédiates que nous allons tout d'abord dégager.

a) Multiplions les deux nombres de (3) par y' et intégrons de x_0 à x :

$$(4)\qquad \frac{y'^2}{2} + \int_{x_0}^{x} py'^2\,dx + \int_{x_0}^{x} q(x)\,da = \mathrm{F}(y) = \int_{y_0}^{y} f(y)\,dy.$$

l'identité

$$\int_{x_0}^{x} q(x)da = (a - a_0)q(x) - \int_{x_0}^{x} (a - a_0)q'(x)dx$$

montre que, dans tout intervalle (x_0, x) où $x > x_0$, le premier membre reste positif, car a est une fonction croissante de y.

Supposons alors, que y, qui croît au début à partir de y_0, lui reste supérieur jusqu'à une valeur x_1 pour laquelle il redevient égal à y_0. En faisant $x = x_1$, $y = y_0$ dans (4), le second membre est nul et le premier est une somme de termes positifs. On aboutit à une contradiction. Donc *y reste toujours $> y_0$*. Il en résulte que *toute solution de* (3) *qui passe par un minimum pour $x = x_0$ reste supérieure à ce minimum pour $x > x_0$*.

Remarque I. — Supposons que pour $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = 0$ et $y''_0 < 0$. *Dans le cas où q est nul*

$$\frac{y'^2}{2} + \int_{x_0}^{x} py'^2dx = \mathrm{F}(y)$$

Supposons que pour $x = x_1 > x_0$ on passe à nouveau par la valeur y_0, on aurait

$$\frac{y_1'^2}{2} + \int_{x_0}^{x_1} py'^2dx = 0$$

ce qui est impossible. Par suite, dans ce cas, toute solution de (3) qui passe par un maximum pour $x = x_0$, reste inférieure à ce maximum pour $x > x_0$.

Remarque II. — Supposons que y passe par un autre minimum $y = y_1 > y_0$ pour $x = x_1$

$$\int_{x_0}^{x_1} py'^2dx + \int_{x_0}^{x_1} q(x)da = \mathrm{F}(y_1).$$

Soit $x > x_1$,

$$\frac{y'^2}{2} + \int_{x_0}^{x_1} py'^2dx + \int_{x_1}^{x} py'^2dx + \int_{x_0}^{x_1} q(x)da + \int_{x_1}^{x} q(x)da = \mathrm{F}(y)\,;$$

$$\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(y_1) = \frac{y'^2}{2} + \int_{x_1}^{x} py'^2dx + \int_{x_1}^{x} q(x)da.$$

Or

$$\int_{x_0}^{x_1} qda = q(x_1)\int_{y_1}^{\xi} da = q(x_1)\{a[y(\xi)] - a[y(x_1)]\},$$
$$\xi > x_1, \qquad a[y(\xi)] > a[y(x_1)].$$

Cette intégrale est positive. Donc $\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(y_1) > 0$.

b) Le premier membre de (4) est toujours positif. Donc $\mathrm{F}(y)$ doit rester toujours > 0. Si Y est la plus petite des racines de F supérieures à y_0, on a

$$y_0 \leqq y \leqq \mathrm{Y}.$$

L'intervalle effectif de variation de y est compris dans (y_0, Y). $\mathrm{F}(y)$ admet, dans cet intervalle, une borne supérieure B et la relation (4) montre que $\frac{y'^2}{2}$ est inférieur à B, d'où

$$-\sqrt{2\mathrm{B}} < y' < \sqrt{2\mathrm{B}},$$

y et y' sont donc bornés dans les deux sens.

c) Les deux intégrales $\int_{x_0}^{x} py'^2dx$ et $\int_{x_0}^{x}(a_0 - a)q'(x)dx$ sont croissantes et toutes deux inférieures à B. Elles ont donc, quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, des limites L et L' dont la somme est au plus égale à B et (4) montre que

$$\lim_{\frac{1}{x}=0}\left[\mathrm{F}(y) - \frac{y'^2}{2}\right] = \mathrm{L} + \mathrm{L}'. \tag{5}$$

Si y tend vers une limite l quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, il en est de même pour y' et réciproquement. Or

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} y'dx, \qquad l = y_0 + \int_{x_0}^{+\infty} y'dx.$$

Puisque y' a une limite l', celle-ci ne peut-être que zéro. Donc, si y ou y' tend vers une limite quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, y' tend vers zéro.

d) Si p a une borne iuférieure positive C

$$C\int_{x_0}^{x} y'^2 dx < \int_{x_0}^{x} py'^2 dx < B$$

l'intégrale $\int_{x_0}^{x} y'^2 dx$ est donc bornée et tend vers une limite quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro.

3. Nous allons démontrer que *dans tous les cas où p a une borne inférieure positive, y' tend vers zéro avec* $\frac{1}{x}$.

Remarquons d'abord que si, à partir d'une certaine valeur de x, y' ne s'annule plus, y croît ou décroît constamment. Comme il est borné dans les deux sens, il tend vers une limite et y' tend vers zéro.

Il ne ncus reste donc qu'à étudier le cas où y présente toujours lorsque x croît indéfiniment, une infinité de maxima et de minima.

[Désignons par $L = \overline{\lim\limits_{x=+\infty}} y'^2$ la plus grande des limites(1) pour x infini positif, de y'^2.

L est fini, nul ou positif. Si $L = 0$, y' tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$. Supposons donc $L > 0$; soit h^2 un nombre compris entre 0 et L ; d'après la définition de L, il existe toujours une infinité de valeurs de x aussi grandes que l'on veut, pour lesquelles $y'^2 > h^2$; on peut choisir parmi ces valeurs une suite croissante

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

telle que la différence de deux termes consécutifs $x_n - x_{n-1}$ soit toujours supérieure à un nombre positif donné 2ε, ce qui s'écrit $x_n - \varepsilon > x_{n-1} + \varepsilon$. Faisons correspondre au terme x_n de la suite l'intervalle $(x_n - \varepsilon,\ x_n + \varepsilon)$; ces intervalles n'empiètent pas les uns sur les autres ; et considérons la série de terme général

$$u_n = \int_{x_n-\varepsilon}^{x_n+\varepsilon} y'^2\, dx\,;$$

(1) Voir les *leçons sur la théorie de la croissance* de M. Borel, 1910, p. 10.

ses termes sont positifs et, si $x_1 - \varepsilon > x_0$, la somme

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n < \int_{x_0}^{+\infty} y'^2\, dx$$

admet une borne supérieure positive (voir plus haut). La série est donc convergente et son terme général u_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. La borne inférieure de y'^2 dans l'intervalle d'intégration $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$ tend aussi vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Par suite, pour n assez grand, il existera dans l'intervalle des valeurs de x pour lesquelles $y'^2 < \frac{h^2}{2}$; soit $\overline{x_n}$ l'une d'elles ; on a

$$y'^2(x_n) - y'^2(\overline{x_n}) > \frac{h^2}{2}$$

ou en appliquant la formule de l'accessoirement fini au premier membre

$$2\,|x_n - \overline{x_n}|\,|y'(\overline{\overline{x_n}})y''(\overline{\overline{x_n}})| > \frac{h^2}{2}$$

$\overline{\overline{x_n}}$ étant compris entre x_n et $\overline{x_n}$, $|x_n - \overline{x_n}| < \varepsilon$, donc

$$|y'(\overline{\overline{x_n}})y''(\overline{\overline{x_n}})| > \frac{h^2}{4\varepsilon}.$$

Mais ε est aussi petit que l'on veut ; il existerait donc des valeurs de x aussi grandes que l'on veut telles que $|y'y''|$ soit arbitrairement grande.

Supposons $|f(y)|$ borné supérieurement dans l'intervalle (y_0, Y) ; alors puisque $|y'|$ et borné et que

$$|y'y''| = \left| f(y) - py' - q(x)\frac{da(y)}{dy} \right| |y'|,$$

le premier nombre est aussi borné en vertu des hypothèses précédentes ; nous aboutissons à une contradiction. On a nécessairement $L = 0$ et y' *tend bien vers zéro avec* $\left.\frac{1}{x}\right]$.

Alors y a une limite l telle que $F(l) = L + L'$ mais

$$y' = \int_{x_0}^{x} \left[f(y) - py' - q\frac{da}{dy} \right] dx\ ;$$

quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, l'intégrale du second membre a pour limite zéro, l'élément différentiel a une limite $f(l)$. Elle ne saurait être que zéro. Donc y *admet comme limite une racine de* $f(y)=0$, racine double de $F(y)=L+L'$.

Ces résultats viennent s'ajouter à ceux de l'étude classique de l'équation $y''=f(y)$ dont on sait les importantes applications en Mécanique.

SUR LA REPRÉSENTATION ASYMPTOTIQUE DU POTENTIEL NEWTONIEN

par **Émile COTTON** †.

INTRODUCTION (¹). — Le terme de rang l, V_l, de la série donnant la représentation asymptotique d'un potentiel newtonien est une somme de produits de deux facteurs ; l'un de ces facteurs dépend uniquement du point potentié ; le second ne dépend que du système agissant, c'est un moment supérieur d'ordre l de la géométrie des masses. On appelle ainsi toute expression analogue aux moments et produits d'inertie d'un système matériel, mais où une forme (polynome homogène) de degré l remplace les formes du second degré des coordonnées d'un point agissant.

Dans les pages suivantes, nous montrons d'abord que si l'on réduit au minimum le nombre des termes de la somme donnant V_l, les moments supérieurs en question appartiennent à une classe particulière, (*moments harmoniques*), celle où les formes intervenant dans le calcul satisfont à l'équation de Laplace.

(¹) Les numéros entre crochets dans le texte indiquent les renvois suivants :

1. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III.
2. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. III.
3. MAXWELL, *Traité d'Electricité et de Magnétisme* (traduction française de Seligmann-Lui).
4. POINCARÉ, *Théorie du potentiel newtonien.*
5. SYLVESTER, *Note on Spherical Harmonics. Philosophical Magazine 5ᵉ série* vol. II p. 251.
6. REYE, *Trägheits und höhere Momente...* Journal de Crelle, t. 72, p. 293 ; t. 78, p. 97. Le résumé de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques éd. française*, t. IV, vol. II. fasc. I, peut suffire.
7. WAVRE, *Figures planétaires et géodésie. Cahiers scientifiques, fasc.* XII.
8. E. COTTON, *Système de bivecteurs associé à un cycle. Comptes rendus*, t. 226, 1948, p. 1564.
9. GUILLAUMIN, *Sur la géométrie intégrale du contour gauche* (*Comptes rendus*, t. 227, 1948, p. 39 et 109).

Le cas particulier, important en Electromagnétisme, de l'angle solide sous lequel on voit d'un point M une courbe fermée, C, est ensuite étudié. Le calcul des intégrales doubles donnant les moments harmoniques se ramène alors à celui d'intégrales curvilignes prises le long de C; dans les expressions de Pfaff figurant sous le signe intégral les coefficients des différentielles des coordonnées sont encore des formes d'ordre l.

La fin de cette article concerne la représentation géométrique si élégante que Maxwell a donnée des harmoniques solides.

1. **Préliminaires. Formes symboliques.** — Le potentiel en un point M (point potentié) correspondant à des éléments agissants situés tous à distance finie de l'origine O des axes rectangulaires, est une fonction harmonique V des coordonnées a, b, c, de ce point supposé extérieur au système agissant. Lorsque la distance $OM = \rho$ est assez grande, V est développable en une série triple dont le terme général V_{mnp} est le produit de $\dfrac{\partial^{m+n+p}\frac{1}{\rho}}{\partial a^m \partial b^n \partial c^p}$ par un facteur indépendant de a, b, c, [4, ch. I; 2, ch. XXVIII]. En groupant dans cette série les termes correspondant aux dérivées du même ordre $l = m + n + p$, on la tranforme en une série simple ΣV_l que nous appelons le *développement asymptotique du potentiel*. Si, comme nous le supposons, V s'annule à l'infini, le premier terme V_0 est le produit de $\frac{1}{\rho}$ par un facteur M (la masse totale) indépendant de a, b, c. Pour $l > 0$, V_l est un *polynome harmonique inverse d'ordre* $-(l+1)$, en appelant ainsi, avec M. Wavre [7], tout polynome se déduisant par inversion, de centre O, d'un polynome harmonique d'ordre l.

Soit $F(\xi, \eta, \zeta)$ un polynome homogène (une forme) de degré l en ξ, η, ζ et f une fonction des variables a, b, c, nous donnerons au produit Ff le sens symbolique suivant, d'un usage courant en Analyse.

Le produit étant effectué suivant les règles de l'Algèbre élémentaire, on remplace chaque monome $\xi^m \eta^n \zeta^p f$ par $\dfrac{\partial^l f}{\partial a^m \partial b^n \partial c^p}$; nous dirons que F est une *forme symbolique* de degré l. Les coefficients de cette forme peuvent dépendre d'autres variables x, y, z indépendantes de a, b, c.

Deux formes symboliques de même degré F, G seront dites

harmoniquement équivalentes (ou, plus brièvement, *équivalentes* (H) si pour toute fonction f satisfaisant à l'équation de Laplace $(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)f=0$, on a $Ff=Gf$.

Le produit $(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)f$ où α, β, γ sont les cosinus directeurs d'un axe δ est la dérivée de f suivant δ. Nous verrons plus loin que toute forme symbolique F d'ordre l est équivalente (H) au produit par une constante de l formes linéaires symboliques telles que la précédente.

Soit $F_l(\xi, \eta, \zeta)$ une forme de degré l, et $G_l(\xi, \eta)+\zeta G_{l-1}(\xi, \eta)$ le reste de la division de F_l considérée comme polynome en ζ par $\zeta^2+\xi^2+\eta^2$; ce reste peut s'obtenir en remplaçant ζ^2 par $-(\xi^2+\eta^2)$, ζ^3 par $-\zeta(\xi^2+\eta^2)$, ζ^4 par $(\xi^2+\eta^2)^2$, etc. G_l, G_{l-1} sont des formes symboliques de degrés respectifs l, $l-1$ et F_l est équivalent (H) a $G_l+\zeta G_{l-1}$.

D'après cela, toute forme symbolique de degré l équivaut (H) à une forme linéaire de $2l+1$ d'entre elles que nous appelerons les *formes symboliques fondamentales*,. Le choix le plus simple pour les applications qui vont suivre, consiste à prendre les monomes symboliques fondamentaux $\dfrac{(-1)^l}{m!\,n!}\xi^m\eta^n\zeta^p$, $(p=0,1 : m+n+p=l)$.

En effectuant sur la fonction harmonique $\dfrac{1}{\rho}$ les opérations correspondant à ces monomes symboliques, nous aurons les *polynomes harmoniques inverses fondamentaux d'ordre* $-(l+1)$

$$(1)\qquad A_{mnp}=\frac{(-1)^l}{m!\,n!}\xi^m\eta^n\zeta^p\frac{1}{\rho}\qquad (p=0,1\,;\quad m+n+p=l).$$

Tout polynome harmonique inverse d'ordre $-(l+1)$ s'exprime d'une façon linéaire et homogène au moyen des A_{mnp}. Il en est ainsi notamment pour le terme général

$$U_l=\frac{(-1)^l}{l!}(x\xi+y\eta+z\zeta)^l\frac{1}{\rho}$$

du développement asymptotique de $\dfrac{1}{r}$ où r désigne la distance MP du point potentié M au point agissant P (de coordonnées x, y, z). Nous poserons

$$(2)\qquad U_l=\Sigma B_{mnp}A_{mnp}\qquad (p=0,1\,;\quad m+n+p=l)$$

Les coefficients B sont des polynomes homogènes de degré l en

x, y, z qui *interviennent constamment dans la suite :* nous dirons qu'ils sont *associés* aux polynomes harmoniques inverses fondamentaux. On a ainsi

$$U_1 = -(x\xi + y\eta + z\zeta)\frac{1}{\rho} = xA_{100} + yA_{010} + zA_{001}\,;$$

$$B_{100} = x, \qquad B_{010} = y, \qquad B_{001} = z.$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(x\xi + y\eta + z\zeta)^2\frac{1}{\rho}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(x\xi + y\eta)^2 + (x\xi + y\eta)z\zeta - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)z^2\right]\frac{1}{\rho}$$

$$\doteq (x^2 - z^2)\frac{1}{2}\xi^2\frac{1}{\rho} + xy\xi\eta\frac{1}{\rho} + (y^2 - z^2)\frac{1}{2}\eta^2\frac{1}{\rho} + xz\xi\zeta\frac{1}{\rho} + yz\eta\zeta\frac{1}{\rho},$$

d'où

$$B_{200} = x^2 - z^2, \quad B_{020} = y^2 - z^2, \quad B_{110} = xy, \quad B_{101} = xz, \quad B_{011} = yz.$$

On obtient de même les expressions :

$$B_{300} = x^3 - 3xz^2, \qquad B_{210} = (x^2 - z^2)y, \qquad B_{120} = (y^2 - z^2)x,$$

$$B_{030} = y^3 - 3yz^2, \qquad B_{201} = \frac{3x^2z - z^2}{3},$$

$$B_{111} = xyz, \qquad B_{021} = \frac{3y^2z - z^3}{3}.$$

On pourrait écrire les expressions explicites des B pour l quelconque ; nous n'aurons pas à les utiliser. Mais nous allons démontrer que *tous les polynomes* B *sont harmoniques*, c'est-à-dire vérifient l'équation de Laplace $D_2B = 0$, D_2 désignant le symbole

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

On le vérifie immédiatement pour $l \leqq 3$. Soit ensuite f une fonction harmonique de a, b, c ; il en est de même pour $(x\xi + y\eta + z\zeta)^l f$ quel que soit l ; d'autre part

$$D_2(x\xi + y\eta + z\zeta)^l f = l(l-1)(x\xi + y\eta + z\zeta)^{l-2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)f = 0.$$

La division de $(x\xi + y\eta + z\zeta)^l$ par $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ considérés tous deux comme des polynomes en ζ donne un quotient Q et un reste $R(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ du premier degré en ζ, d'où, f étant harmonique

$$D_2(x\xi + y\eta + z\zeta)^l f = D_2Q(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)f + D_2Rf = D_2Rf = 0.$$

D'ailleurs $\frac{(-1)^l}{l!} \mathrm{R}f = \Sigma \mathrm{B}_{mnp} \bar{\mathrm{A}}_{mnp}$ les B étant les mêmes polynomes que plus haut et les $\bar{\mathrm{A}}$ donnés par

$$\bar{\mathrm{A}}_{mnp} = \frac{(-1)^l}{l!} \xi^m \eta^n \zeta^p f \quad (p = 0, 1\ ;\ m+n+p = l)$$

on a $\Sigma \bar{\mathrm{A}}_{mnp} \mathrm{D}_2 \mathrm{B}_{mnp} = 0$, quelle que soit la fonction harmonique $f(a, b, c)$. Prenons pour f un polynome harmonique homogène de degré l ; comme il en existe $2l+1$ linéairement indépendants, les coefficients $\mathrm{D}_2 \mathrm{B}_{mnp}$ sont nuls comme nous l'avons annoncé.

2. **Moments harmoniques. — Changement des axes de coordonnées.** — Passons au cas d'un système agissant composé de points P discrets, chacun d'eux étant affecté d'une masse μ (positive ou négative), le potentiel est donné par

$$\mathrm{V} = \Sigma \mathrm{V}_l, \qquad \mathrm{V}_l = \Sigma \mathrm{A}_{mnp} \mathrm{S} \mu \mathrm{B}_{mnp} \qquad (p = 0, 1\ ;\ m+n+p = l)$$

S désignant une addition étendue à tous les points P.

Si le système agissant est constitué par des *masses réparties* soit dans un volume, soit sur une surface ou sur une ligne, on a pour le potentiel une expression analogue à la précédente en remplaçant les sommes S par des intégrales $\int \mathrm{B}(x, y, z)\, d\mu$ où $d\mu$ est le produit de la mesure de l'élément infiniment petit de volume, de surface ou de ligne, où est situé P, par la densité en ce point.

On trouve dans les ouvrages classiques [4, n° 25 ; 2, Ch. XXVIII] l'énoncé d'une condition à laquelle il suffit que ρ satisfasse pour que l'expression asymptotique $\Sigma \mathrm{V}_l$ soit valable.

Dans la géométrie des masses, on appelle moments supérieurs d'ordre l les expressions $\mathrm{S}\mu \mathrm{C}(x, y, z)$, $\int \mathrm{C}(x, y, z) d\mu$, ou C désigne un polynome homogène quelconque de degré l. Ils ont été introduits par Reye[6]. Ceux que nous venons de rencontrer constituent une classe particulière, puisque les C satisfont à l'équation de Laplace ; nous les appellerons *moments harmoniques* d'ordre l ; la masse totale correspondant à $l = 0$ sera appelée le moment d'ordre zéro.

Le *développement asymptotique d'un potentiel dépend* non seulement du milieu agissant, mais aussi *des axes de coordonnées choisis*. Quand on prend de nouveaux axes, $\mathrm{O}'x'y'z'$, les nouvelles coordon-

nées du point potentié M étant a', b', c', les nouveaux polynomes inverses fondamentaux d'ordre l sont

$$A'_{mnp} = \frac{(-1)^l}{m!\,n!} \frac{\partial^l \frac{1}{\rho'}}{\partial a'^m \partial b'^n \partial c'^p} \qquad (p = 0, 1\,;\ m+n+p = l).$$

Les nouveaux moments harmoniques fondamentaux

$$S\mu B(x', y', z'), \quad \int B(x', y', z')d\mu$$

se calculent en fonction des anciens en appliquant les formules du changement de coordonnées.

Si l'on change d'abord la direction des axes, sans changer l'origine, les nouveaux moments fondamentaux d'ordre l sont des fonctions linéaires et homogènes des anciens moments d'ordre l.

Quand on passe des axes Ox, Oy, Oz à des axes parallèles $O'x'$, $O'y'$, $O'x'$, issus d'une origine différente, O', de coordonnées x_0, y_0, z_0 on calcule $B(x', y', z') = B(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ par la formule de Taylor ; comme les dérivées d'une fonction harmonique sont encore harmoniques, les nouveaux moments harmoniques d'ordre l s'expriment linéairement en fonction des anciens moments harmoniques d'ordres 0, 1, 2, ..., l; de plus le coefficient de $S\mu B(x, y, z)$ est égal à l'unité.

$$S\mu B(x', y', z') = S\mu B(x, y, z) - x_0 S\mu \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial x} - y_0 S\mu \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial y} - z_0 S\mu \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial z} + \ldots.$$

On a utilisé le changement d'axes pour donner aux premiers termes du développement asymptotique une forme réduite simple ; dans la théorie de la gravitation (masses toutes positives) on prend comme axes de coordonnées les axes de l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité [1, Ch. XXIX]. Pareil choix n'est plus possible si la masse totale est nulle, mais on peut alors en général utiliser la forme réduite de Maxwell [3, t. II, n° 392]. Elle cesse d'être applicable si les moments du premier ordre $S\mu x$, $S\mu y$, $S\mu z$ sont nuls eux aussi (système indifférent d'ordre I).

On peut imaginer des systèmes où les moments harmoniques d'ordre inférieur à l sont nuls, ceux d'ordre l ne l'étant pas tous. Un tel système sera dit *harmoniquement indifférent d'ordre* $l - 1$; on

remarquera que *ses moments harmoniques d'ordre l ne changent pas lors d'une translation des axes de coordonnées.*

Pour un système agissant indifférent d'ordre $l-1$, le potentiel en M est, lorsque M s'éloigne à l'infini sur une droite passant par O, infiniment petit d'ordre l par rapport à $\frac{1}{\rho}$; ($\rho = \mathrm{OM}$).

Cette indifférence harmonique est analogue à celle de Reye [6], mais moins restrictive. Par exemple pour $l=3$, l'indifférence harmonique se traduit par

$$\mathrm{S}\mu = \mathrm{S}\mu x = \mathrm{S}\mu y = \mathrm{S}\mu z = \mathrm{S}\mu yz = \mathrm{S}\mu zx = \mathrm{S}\mu xy = 0\,;$$
$$\mathrm{S}\mu(x^2 - z^2) = \mathrm{S}\mu(y^2 - z^2)\ 0$$

et pour exprimer l'indifférence de Reye, il faut 10 équations qu'on écrit en remplaçant les deux équations du second groupe par

$$\mathrm{S}\mu x^2 = \mathrm{S}\mu y^2 = \mathrm{S}\mu z^2 = 0.$$

Étant donné un système S harmoniquement indifférent d'ordre $l-1$, on en déduit d'abord un système S' en multipliant toutes les masses par -1, puis un système S'' par translation de S'. Le système S formé par la réunion de S et de S'' est harmoniquement indifférent d'ordre l (au moins).

3. **Potentiel d'un ensemble de doublets.** — Le potentiel en M d'un doublet (on dit aussi dipol ou aimant élémentaire), placé en P de mesure ν, d'axe δ, est

$$\mathrm{W} = \nu\frac{d\frac{1}{r}}{d\delta} = \alpha\nu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \beta\nu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma\nu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z},$$

x, y, z désignent toujours les coordonnées de P ; α, β, γ sont les cosinus directeurs de δ.

Le développement asymptotique de W se déduit de celui de $\frac{1}{r}$ par dérivation terme à terme

$$\mathrm{W} = \sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{W}_l, \qquad \mathrm{W}_l = \alpha\nu\frac{\partial \mathrm{U}_l}{\partial x} + \beta\nu\frac{\partial \mathrm{U}_l}{\partial y} + \gamma\nu\frac{\partial \mathrm{U}_l}{\partial z},$$

ou en remplaçant U_l par son expression (2)

$$\mathrm{W}_l = \Sigma\left(\alpha\nu\frac{\partial \mathrm{B}_{mnp}}{\partial x} + \beta\nu\frac{\partial \mathrm{B}_{mnp}}{\partial y} + \gamma\nu\frac{\partial \mathrm{B}_{mnp}}{\partial z}\right), \quad (p=0,1\,;\ m+n+p=l).$$

Le développement asymptotique du *potentiel* V *d'un système de doublets* placés en des points discrets ou répartis d'une façon continue, se déduit de là par des additions ou des intégrations.

Posons

$$V = \sum_{l=1}^{\infty} V_l, \qquad V_l = \Sigma C_{mnp} A_{mnp} \qquad (p = 0, 1\,; \quad m+n+p = l)\,;$$

on a dans le premier cas

$$C_{mnp} = S\left(\frac{\partial B_{mnp}}{\partial x}\mathbf{x} + \frac{\partial B_{mnp}}{\partial y}\mathbf{y} + \frac{\partial B_{mnp}}{\partial z}\mathbf{z}\right) \quad (\mathbf{x} = \alpha\nu, \quad \mathbf{y} = \beta\nu, \quad \mathbf{z} = \gamma\nu)$$

et dans le second

$$C_{mnp} = \int \frac{\partial B_{mnp}}{\partial x} d\mathbf{x} + \int \frac{\partial B_{mnp}}{\partial y} d\mathbf{y} + \int \frac{\partial B_{mnp}}{\partial z} d\mathbf{z}$$
$$(d\mathbf{x} = \alpha d\nu, \quad d\mathbf{y} = \beta d\nu, \quad d\mathbf{z} = \gamma d\nu)$$

$d\nu$ est le produit par une densité de la mesure l'élément de volume, de surface ou de ligne.

On a encore des moments harmoniques, mais leur ordre est $l - 1$ et pour avoir le coefficient de A_{mnp}, il faut calculer trois de ces moments au lieu d'un seul.

4. **Angle solide. Champ magnétique de courants fermés.** — Dans le cas d'une double couche, α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à la surface σ sur laquelle est placée la double couche. Soit C le contour fermé (ou cycle) constituant la frontière de σ. *Si la densité est constante*, le potentiel ne change pas quand on modifie σ sans changer C ; il en est de même des moments harmoniques C_{mnp} et l'on prévoit que leur calcul se ramène à celui d'intégrales curvilignes prises le long de C. Nous allons le montrer, en prenant la densité égale à l'unité ; le potentiel étudié $\Omega = \Sigma\Omega_l$ est alors l'*angle solide* sous lequel on voit du point potentié M le cycle C.

Nous prendrons pour support σ de la double couche la surface conique engendrée par les vecteurs OP_1 ayant leur origine en O et leurs extrémités P_1 sur C. Les intégrales à calculer sont de la forme

$$\int_\sigma [\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z) + \gamma h(x,y,z)]\, d\sigma\,;$$

f, g, h sont des polynômes homogènes en x, y, z de degré $l - 1$ et

α, β, γ ne changent pas quand P décrit le vecteur OP_1. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de P_1, on a

$$\frac{f}{f_1}=\frac{g}{g_1}=\frac{h}{h_1}=u^{l-1}, \qquad u=\frac{OP}{OP_1}, \qquad f_1=f(x_1, y_1, z_1)\ldots$$

Évaluons la partie de l'intégrale correspondant à la partie de la surface conique comprise entre deux génératrices infiniment voisines OP_1, OP'_1 : nous la décomposons en petits quadrilatères $PQQ'P'$: PP' est homothétique du petit arc P_1P_1 par rapport à O et dans le rapport u. QQ' s'en déduit de la même façon avec le rapport $u+du$. L'expression à intégrer est sensiblement (c'est-à-dire à des infiniment petits près négligeables dans l'intégration) $(\alpha f_1+\beta g_1+\gamma h_1)\lambda^2 u^l du\, d\omega$, $\lambda=OP_1$, $d\omega$ est l'angle $P_1OP'_1$. Intégrant d'abord par rapport à u, entre les limites o, 1, on trouve $(\alpha f_1+\beta g_1+\gamma h_1)\dfrac{\lambda^2}{l+1}d\omega$. Mais $\lambda^2 d\omega$ est sensiblement la mesure des produits vectoriels $OP_1 \wedge OP'_1=OP_1 \wedge P_1P'_1$, les sens de parcours de C et de la normale étant convenablement associés ; tout revient à intégrer

$$\frac{1}{l+1}(\alpha f_1+\beta g_1+\gamma h_1)OP_1 \wedge P_1P'_1=\frac{1}{l+1}\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ dx_1 & dy_1 & dz_1 \end{vmatrix}$$

le long de C.

Appliquons ceci à l'angle solide ; x, y, z étant maintenant les coordonnées d'un point courant de C, nous arrivons au résultat suivant :

Dans le développement asymptotique de l'angle solide Ω, *le coefficient* C_{mnp} *du polynôme harmonique inverse* A_{mnp} *est*

$$C_{mnp}=\frac{1}{l+1}\int_C \begin{vmatrix} \dfrac{\partial B_{mnp}}{\partial x} & \dfrac{\partial B_{mnp}}{\partial y} & \dfrac{\partial B_{mnp}}{\partial z} \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} \qquad (p=0, 1\,;\ m+n+p=l).$$

On peut, sans changer la valeur d'une intégrale prise le long d'un cycle, ajouter à l'expression à intégrer la différentielle totale d'une fonction uniforme, et prendre dans le cas actuel la différentielle d'un polynôme homogène en x, y, z de degré $l+1$. Il est possible dans certains cas de simplifier ainsi l'expression de Pfaff à intégrer, nous l'avons fait dans ce qui suit.

On trouve ainsi, pour $l = 1$

$$C_{100} = \frac{1}{2}\int_C (ydz - zdy) \qquad C_{010} = \frac{1}{2}\int_C (zdx - xdz)$$

$$C_{001} = \frac{1}{2}\int_C (xdy - ydx),$$

ce sont les projections du *vecteur aréolaire* du cycle C [8. 9].

Pour $l = 2$

$$C_{200} = -2\int zxdy, \quad C_{110} = \frac{1}{2}\int (y^2 - x^2)dz, \quad C_{020} = 2\int yzdx,$$

$$C_{101} = \frac{1}{2}\int (x^2 - z^2)dy, \quad C_{011} = \frac{1}{2}\int (y^2 - z^2)dx.$$

Remarques. 1. — *Si le cycle C est un polygone, les intégrales sont faciles à calculer* : soit AB l'un des côtés, pour intégrer le long de AB on exprime les coordonnées x, y, z d'un point P de AB en fonction linéaire d'un paramètre, par exemple $s = AM$, on est ramené à l'intégration d'un polynôme en s.

2. — Les résultats précédents donnent le *développement asymptotique du potentiel* V *du champ magnétique d'un ensemble de courants électriques fermés*. Ce potentiel $V = kSi\Omega$; k est une constante dépendant seulement des unités choisies, i l'intensité du courant correspondant au cycle C, Ω l'angle solide sous lequel on voit ce cycle du point potentié M ; S est une sommation étendue à tous ces courants ; V_l terme général du développement asymptotique de V est

$$V_l = k\Sigma E_{mnp}A_{mnp} \qquad E_{mnp} = SiC_{mnp} \qquad (p = 0, 1 \; ; \; m + n + p = l).$$

Un tel ensemble est harmoniquement indifférent d'ordre $l \geq 1$; en choisissant convenablement les cycles C et les intensités i, on peut (n° 2) obtenir une indifférence harmonique d'ordre quelconque.

5. Représentation géométrique de Maxwell. — Nous appellerons *faisceau* la figure formée par l axes réels $h_1, h_2, \ldots, h_l$ issus de l'origine ; soit k un *coefficient* affecté à ce faisceau, l'expression

$$k\frac{(-1)^l}{l!}\frac{d}{dh_1}\frac{d}{dh_2}\cdots\frac{d}{dh_l}\frac{1}{\rho}, \qquad \rho = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

où le produit des dérivés $\frac{d}{dh_s} = \alpha_s\xi + \beta_s\eta + \gamma_s\zeta$ (α_s, β_s, γ_s étant les

cosinus directeurs de h_s) a le sens symbolique du n° 1, est un polynôme harmonique inverse que Maxwell appelle harmonique solide d'ordre $-(l+1)$. Réciproquement *tout polynôme harmonique inverse peut être obtenu ainsi et d'une seule façon* en considérant toutefois comme identiques deux faisceaux se déduisant l'un de l'autre en changeant les sens d'un nombre pair d'axes.

Cette proposition de Maxwell et de Sylvester est une conséquence immédiate du lemme suivant, que nous établirons en ajoutant quelques compléments à l'article de Sylvester [5].

LEMME. — *Toute forme symbolique d'ordre l, à coefficients réels, est harmoniquement équivalente à un produit de l facteurs linéaires symboliques* $u_s\xi+v_s\eta+w_s\zeta$ *à coefficients réels.*

Soit $\Lambda=Aa+Bb+Cc$ une forme linéaire des coordonnées a, b, c du point potentié M, les coefficients A, B, C pouvant être imaginaires, appliquons à Λ^t (t entier $\geqq l$) l'opération symbolique $\xi^m\eta^n\zeta^p$ il vient

$$\xi^m\eta^n\zeta^p\Lambda^t=t(t-1)\dots(t-l+1)\Lambda^{t-l}A^mB^nC^p, \quad (m+n+p=l).$$

On en conclut que si $A^2+B^2+C^2=0$, (le point de coordonnées A, B, C appartient alors au cône isotrope de sommet O) Λ^t est harmonique. Plus généralement, si $F(A, B, C)=0$, $F(\xi, \eta, \zeta)$ étant une forme de degré l à coefficients réels, Λ^t vérifie l'équation $F(\xi, \eta, \zeta)\Lambda^t=0$, et aussi toute équation $F_1(\xi, \eta, \zeta)\Lambda^t=0$, où F_1 est une forme symbolique harmoniquement équivalente à F.

Le lemme étant supposé exact, prenons pour F_1 le produit symbolique de l facteurs linéaires, $F_1(A, B, C)$ devant être nul, et étant un produit de l facteurs linéaires de A, B, C, l'un de ces facteurs $u_sA+v_sB+w_sC$ est nul ; puisque u_s, v_s, w_s sont réels, il en sera de même de $u_sA'+v_sB'+w_sC'$, A', B', C' étant imaginaires conjugués de A, B, C. En d'autres termes, le plan $u_sX+v_sY+w_sZ=0$ contient deux génératrices isotropes imaginaires conjuguées du cône $F(X, Y, Z)=0$, qui appartiennent aussi à tous les cônes $F_1(X, Y, Z)=0$, en particulier à celui dont l'équation est du premier degré en Z (voir n° 1) $G_l(X, Y)+ZG_{l-1}(X, Y)=0$.

Les projections de ces génératrices sur le plan XOY sont données par l'équation homogène de degré $2l$

$$G_l^2(X, Y)+(X^2+Y^2)G_{l-1}^2(X, Y)=0,$$

et leurs coefficients angulaires μ par

$$(3) \qquad G_l^2(1, \mu)+(1+\mu^2)G_{l-1}^2(1, \mu)=0.$$

A une racine μ de cette équation, correspond un système $1, \mu, -\dfrac{G_l(1, \mu)}{G_{l-1}(1, \mu)}$ de paramètres directeurs de la génératrice : en remplaçant μ par l'imaginaire conjuguée μ', on a des paramètres directeurs de la génératrice isotrope conjuguée. Il est facile d'écrire l'équation du plan contenant ces deux génératrices et de la ramener à avoir ses coefficients u_s, v_s, w_s réels. En définitive, si le lemme est exact, la résolution d'une équation algébrique (3) de degré $2l$ permet d'obtenir très facilement les l facteurs symboliques $u_s\xi + v_s\eta + w_s\zeta$.

D'ailleurs, le *lemme est évidemment exact pour* $l = 1$; *admettons qu'il le soit aussi pour* $l = 2, 3, \ldots, L - 1$, *nous allons vérifier qu'il est encore exact pour la valeur* L.

Supposons trouvé un plan Π contenant deux génératrices isotropes conjuguées du cône $F(X, Y, Z) = 0$, on peut choisir les axes de coordonnées de façon que l'équation de ce plan soit $Z = 0$, et prendre pour paramètres directeurs les génératrices isotropes contenues dans ce plan $1, i, 0$ et $1, -i, 0$. L'équation (3) donne $G_L(s, i) = G_L(1, -i) = 0$; si $G_L(X, Y)$ n'est pas identiquement nul, il est divisible par $X^2 + Y^2$; écrivons

$$G_L(X, Y) = (X^2 + Y^2) G_{L-2}(X, Y) ;$$

alors $F(\xi, \eta, \zeta)$ est harmoniquement équivalent à

$$\zeta[G_{L-1}(\xi, \eta) - \zeta G_{L-2}(\xi, \eta)],$$

le crochet étant une forme symbolique de degré $L - 1$ est équivalent au produit de $L - 1$ facteurs linéaires ; la démonstration du lemme est ainsi achevée.

Remarques. 1. — Les axes du faisceau de Maxwell relatif aux fonctions A_{mnp} sont Ox, Oy, Oz comptés respectivement avec les ordres de multiplicité m, n, p.

2. — On peut utiliser pour représenter, les harmoniques solides de degré $-(l+1)$ des polynomes inverses fondamentaux différents de ceux dont nous avons fait usage, et notamment ceux qui correspondent aux *fonctions sphériques fondamentales* [3, 1re partie, ch. IX]. Les faisceaux d'axes correspondant à ceux-ci comprennent d'abord q axes situés dans le plan xOy disposés soit suivant les rayons d'un polygone régulier de $2q$ côtés ayant son centre eu O, l'un de ses sommets sur Ox, soit suivant les apothèmes. Les $l - q$ axes restants sont confondus avec Oz.

Il est d'ailleurs facile d'exprimer ces harmoniques solides fondamentaux en fonction des nôtres, A_{mnp}, en utilisant les formules données par Maxwell. Nous ne ferons pas ce calcul ; l'emploi des coordonnées polaires étant moins pratique pour l'étude faite plus haut que celui des coordonnées cartésiennes, nous n'avons pas eu à utiliser les fonctions sphériques.

3. — Désignons par C_{mnp} les coefficients des A_{mnp} dans le terme V_l du potentiel V d'un système agissant, par exemple un ensemble E de courants fermés. Regardons ces $2l+1$ coefficients comme les composantes d'un vecteur $v(E)$ d'un espace (euclidien ou affine) à $2l+1$ dimensions. Le vecteur $v(E)$ correspondant à un ensemble E obtenu par réunion de deux autres E′, E″, est la somme géométrique des vecteurs correspondants $v(E')$, $v(E'')$. De même si E_1, se déduit de E en multipliant les intensités de tous les courants par un même nombre θ, le vecteur $v(E_1)$ est le produit par θ du vecteur $v(E)$. La représentation si élégante de Maxwell n'utilise que l'espace ordinaire, mais ses éléments (faisceau d'axes et coefficient) ne pouvant s'obtenir que par la résolution d'une équation algébrique, elle ne donne pas une interprétation géométrique aussi simple des opérations précédentes.

COLLOQUE MATHÉMATIQUE

Grenoble, 30 juin-1er juillet 1949.

Nous avons été très honorés de recevoir MM. les professeurs Frédéric Riesz de Budapest et Marcel Riesz de Lund, qui, invités à notre Université, nous ont fait deux grandes conférences. Ils étaient accompagnés de M. le professeur Renyi de Budapest et de MM. Faryi, Gal et Horwath, jeunes mathématiciens hongrois. Aussi avons-nous organisé un petit congrès auquel prirent part, outre les mathématiciens de Grenoble, MM. les professeurs Favard de Paris et Eyraud de Lyon.

Le 30 juin M. F. Riesz fit une conférence sur l'évolution de la notion d'intégrale depuis Lebesgue, insérée ci-après; le 1er juillet M. M. Riesz parla de l'optique géométrique en espace-temps.

Entre temps, la matinée du 1er juillet fut consacrée à diverses communications sous la présidence de MM. F. et M. Riesz :

Renyi.	Sur un théorème général de probabilité (communication insérée ci-après).
Faryi.	Sur le caractère topologique des groupes géométriques.
Gal.	Sur les propriétés arithmétiques d'une intégrale définie.
Horwath.	Quelques méthodes pour établir la fermeture des suites de fonctions.
Eyraud.	Sur les nombres ordinaux.
Favard.	Sur l'approximation linéaire dans les espaces vectoriels.

L'ÉVOLUTION DE LA NOTION D'INTÉGRALE DEPUIS LEBESGUE (¹)

par **F. RIESZ** (Budapest).

En exprimant toute ma gratitude pour l'invitation dont je me sens extrêmement honoré, c'est du concept génial de l'intégrale que l'on doit à Henri Lebesgue et de son évolution au cours de presque un demi-siècle, que je vais parler. Si je revendique le droit de le faire, c'est que j'ai été l'un des premiers à reconnaître la profondeur et l'immense portée de cette notion d'intégrale.

Si je me ne trompe pas, c'est le livre de Lebesgue sur les séries trigonométriques, dans la collection Borel, qui a attiré mon attention sur sa notion d'intégrale ; après, pour pénétrer dans les détails, j'ai étudié aussi sa Thèse et son livre sur l'intégration. Cependant l'idée et le courage d'essayer d'appliquer cette notion à des problèmes dont je m'occupais, me sont venues en lisant, en 1906, l'excellent Mémoire de Fatou, imprimé dans les *Acta Mathematica* et que l'auteur présentait aussi comme Thèse. C'est en particulier un théorème très simple, appelé généralement lemme de Fatou et assurant, dans le langage d'aujourd'hui la semicontinuité inférieure de l'opération fonctionnelle linéaire que constitue l'intégration, qui m'aida à démontrer, en février 1907, quelques semaines après la lecture de la Thèse, le théorème découvert aussi indépendamment et simultanément par M. Ernest Fischer et que l'on cite sous le nom de nous deux. Le théorème servit, en premier lieu, de billet permanent d'aller et retour entre les deux espaces à une infinité de dimensions dont l'intérêt s'attache à la théorie des équations intégrales, savoir l'espace à une infinité de coordonnées de Hilbert et

(¹) Conférence faite à Paris sur l'invitation de la Faculté des Sciences et de la Société mathématique de France et répétée à Grenoble (juin 1949).

l'ensemble L^2 des fonctions mesurables et de carré sommable, deux espaces que l'on envisage d'ailleurs aujourd'hui, avec M. von Neumann, comme deux réalisations d'une notion plus générale, savoir de l'espace abstrait de Hilbert. C'était peut-être la première application de la théorie de Lebesgue, après, bien entendu, celles faites par lui-même et par Fatou qui attirait l'intérêt des Mathématiciens et qui mettait en lumière l'importance de sa notion d'intégrale. Parmi ceux, qui se hâtèrent de l'appliquer, qu'il me soit permis de citer Émile Picard, qui en tira parti pour la théorie des équations intégrales de première espèce, tandis que la plupart de ses contemporains, fidèles à l'intégrale classique et ses généralisations immédiates, ne s'empressaient pas autour de l'intégrale nouvelle. Il me faut encore citer M. Fréchet, qui s'aperçut presque immédiatement d'une conséquence importante de notre théorème, savoir l'expression, sous forme d'intégrale, de toute opération linéaire définie dans l'espace fonctionnel L^2 des fonctions sommables ainsi que leurs carrés. D'ailleurs, quant à moi, j'ai tiré indépendamment la même conséquence; par hasard, nos deux notes sur le sujet furent présentées, en juin 1907, dans la même séance de l'Académie des Sciences et ont paru dans le même fascicule des Comptes Rendus. Peu de temps après j'ai établi l'expression analogue pour l'espace L^p.

Outre l'importance de la formule dont je viens de parler et qui entre autres rendait d'excellents services dans la théorie des équations intégrales, j'avais encore une seconde raison d'en parler. C'est qu'elle me suggérait d'envisager la question analogue pour un espace fonctionnel d'une apparence beaucoup plus simple : l'espace formé par l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle fermé (a, b). Étant donné dans cet espace une opération telle que

$$A(f+g)=Af+Ag, \qquad A(cf)=cAf, \qquad |Af| \leqq M \max |f|,$$

où la quantité M ne dépend que de l'opération A, peut-on la mettre sous la forme

$$A(f)=\int_a^b f(x)a(x)\,dx$$

où $a(x)$, fonction génératrice de l'opération, A est la même pour toutes les $f(x)$? Or il est évident, qu'une des opérations les plus simples A, savoir $Af=f(x_0)$, tout en entrant dans notre catégorie, ne peut donner lieu à une telle représentation. En effet, pour arriver à une

réponse positive et c'est ce que j'ai découvert en 1909, il faut avoir recours à un autre type d'intégrale, l'intégrale de Stieltjes, généralisation immédiate de l'intégrale classique. La seule différence c'est que dans les sommes dont l'intégrale est la limite, il faut remplacer les différences $x_k - x_{k-1}$ par les variations $\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$ d'une fonction $\alpha(x)$, fonction que l'on suppose, dans la plupart des applications, être monotone ou à variation bornée. Alors, en se servant d'une telle intégrale, la réponse à notre question sera affirmative ; en effet, toute opération linéaire A sur l'espace C pourra être mise sous la forme

$$\mathrm{A}f = \int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

où la fonction à variation bornée $\alpha(x)$, génératrice de l'opération A, est déterminée par l'opération A, à une constante additive près, en tous ses points de continuité D'ailleurs il me faut avouer que ce n'était pas la première réponse affirmative à notre question ; en effet, déjà antérieurement MM. Hadamard et Fréchet ont réussi à exprimer l'opération A par une suite convergente d'intégrales ordinaires

$$\int_a^b f(x)a_n(x)\,dx.$$

Mais pour revenir à Lebesgue, la conséquence la plus intéressante de ma découverte du rôle que joue l'intégrale de Stieltjes pour les opérations linéaires, c'est qu'elle lui suggérait presque immédiatement d'incorporer cette intégrale dans la sienne. En effet, supposons pour l'instant que la fonction $\alpha(x)$ figurant dans l'intégrale

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

soit continue et strictement croissante, donc nul part constante et que par conséquent, elle admette une inverse $x(\alpha)$ du même type ; alors la définition de l'intégrale par des sommes approchées met immédiatement en évidence que l'intégrale de Stieltjes s'écrit aussi sous la forme

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f[x(\alpha)]\,d\alpha.$$

Or, cette relation est valable aussi sous des conditions plus générales, savoir quand on permet à la fonction $\alpha(x)$ de faire des sauts et de rester constante dans des intervalles. En effet il n'est pas difficile de se fixer ce qu'on veut entendre par fonction inverse sous ces

conditions plus générales et si l'on veut aller encore plus loin en passant à des $\alpha(x)$ à variation bornée, on pourra, outre l'idée évidente de les décomposer en des fonctions monotones, penser aux intégrales de ligne, ce qui suggérera d'introduire pour nouvelle variable non pas $\alpha = \alpha(x)$ elle-même, mais sa variation totale indéfinie, c'est-à-dire sa variation totale formée de a jusqu'à x ou ce qui revient au même, la longueur d'arc de la courbe rectifiable $x = \alpha(t)$, $y = 0$. Les détails sont tellement évidents que vous me permettrez de ne pas les exposer. Encore un dernier pas et nous arrivons à ce qu'on appelle l'intégrale de Stieltjes-Lebesgue : au lieu de supposer que la fonction à intégrer $f(x)$ soit continue ou au moins pas trop discontinue, la seule condition que l'on s'impose est que la nouvelle intégrale à laquelle on arrive, soit une intégrale au sens de Lebesgue. Je reparlerai encore des relations entre les deux intégrales. Mais avant cela, il me faut encore retourner à l'intégrale de Lebesgue et parler de ses divers modes d'introduction.

Vous connaissez la définition de Lebesgue lui-même, qui se base sur la notion de mesure et qui consiste en substance à remplacer, dans la formation des sommes d'approximation, les segments de l'intervalle d'intégration par des ensembles mesurables convenablement choisis. Cependant Lebesgue a fait déjà allusion à une définition descriptive laquelle, en postulant certaines propriétés simples de l'intégrale, telles qu'on les rencontre en analyse classique, par exemple dans l'intégration des fonctions continues, s'efforce de les conserver en passant à des champs plus larges de fonctions. Dans le langage d'aujourd'hui, ce dont il s'agit, c'est d'envisager l'intégration comme une opération fonctionnelle, définie d'abord pour les fonctions continues, ou même si l'on veut pour un type encore plus simple, c'est-à-dire pour les fonctions en escalier et puis de l'étendre à des fonctions limites. Or, il est évident que le passage à des fonctions limites devra être soumis à quelques conditions restrictives et c'est du choix de ces conditions que dépendent les diverses définitions de l'intégrale. Lebesgue lui-même propose (sous le nom de 6^{e} condition) de considérer les limites des suites croissantes et bornées de fonctions. La première idée qui se présente alors est d'opérer alternativement avec des suites croissantes ou décroissantes : en le faisant indéfiniment, on définira l'intégrale pour toutes les classes de Baire. Mais ne peut-on pas y arriver plus vite ? W. H. Young montre que si l'on décide de faire

abstraction des ensembles de mesure nulle, on arrive déjà en deux étapes essentiellement à l'intégrale de Lebesgue. Dans le même but M. Borel, dans un mémoire qu'il faisait paraître dans le *Journal de Liouville*, se sert de la notion qu'il appelle convergence asymptotique, mais pour laquelle on a généralement adopté le nom « convergence en mesure ». Ce type de convergence dont, entre autres, on doit une analyse profonde à M. Fréchet et qui joue aussi un rôle important en théorie des probabilités, n'est pas en réalité une convergence effective, mais une sorte de convergence en moyenne ; en particulier, toute suite convergente en moyenne par rapport à un exposant $p \geq 1$ converge aussi en mesure. Or on peut aussi la définir sans se reporter à la notion générale de mesure ; il suffit de se servir de l'idée d'ensemble de mesure nulle, c'est-à-dire savoir ce qu'on veut entendre par « presque partout ». En effet, j'ai montré qu'elle se caractérise aussi par le fait que de toute suite partielle de la suite envisagée on peut extraire une autre suite partielle qui converge presque partout et que les fonctions limites de toutes ces suites coïncident presque partout.

Ce dernier fait, ainsi que le résultat de W. H. Young que nous venons d'indiquer et de plus le rôle que jouent les ensembles de mesure nulle dans un autre chapitre de la théorie, concernant l'existence de la dérivée, suggèrent déjà d'essayer d'introduire et d'étudier l'intégrale de Lebesgue sans utiliser la théorie de la mesure dans toute sa généralité, mais seulement la notion et les propriétés évidentes des ensembles de mesure nulle. C'est ce que j'ai esquissé déjà en 1912 dans une note des Comptes rendus. Puis, en 1916, à l'occasion du Congrès scandinave à Stockholm, j'ai eu plusieurs entretiens avec Mittag-Leffler, qui, en admirateur de Weierstrass qu'il était, pensait pouvoir faire remonter l'idée de l'intégrale de Lebesgue à ce grand géomètre, mais sans y réussir. Sur son invitation, j'ai rédigé, pour les *Acta Mathematica*, un exposé détaillé de mes idées. L'idée principale me fut suggérée par ce fait que les ensembles de mesure nulle figurent comme exceptions permises dans presque tous les résultats de la théorie : alors il n'y avait qu'à se contenter, dès le commencement, de n'envisager que des suites qui ne convergent pas néccessairement partout, mais seulement presque partout. J'ai montré d'une manière peut-être plus compliquée que je le pourrais faire aujourd'hui que toute suite bornée de fonctions en escalier, définies sur un intervalle fini et qui converge presque partout, peut être intégrée terme à terme, c'est-à-dire que la suite des intégrales est

une suite numérique convergente. En attachant la limite de cette suite intégrée comme valeur d'intégrale à la fonction limite, il est d'abord facile de voir que cette intégrale dépend seulement de la fonction limite et non pas de la suite particulière dont on se sert. De cette façon, on vient d'attacher une intégrale à toutes les fonctions limites possibles et on voit aisément que ce sont précisément les fonctions bornées et intégrables ou comme on dit aussi, sommables au sens de Lebesgue. Enfin, le passage à des fonctions non bornées est presque immédiat ; de plus les divers critères d'intégrabilité et les règles concernant l'intégration terme à terme des suites de fonctions sommables, l'intégration par partie et le changement de variables se démontrent sans peine. La mesure des ensembles se définit par l'intégrale de leur fonction caractéristique, etc. Le seul point qui exige un certain effort consiste en ce que les fonctions limites des suites bornées et convergentes partout ou presque partout des fonctions obtenues en première étape sont du même type, c'est-à-dire qu'un prolongement de notre procédé d'extension ne fournit aucune nouvelle fonction.

Une autre méthode pour introduire l'intégrale dont je me sers dans mon cours et qui s'est formée et simplifiée progressivement sans que l'on en puisse nommer l'auteur, opère, conformément au postulat posé par Lebesgue, avec des suites croissantes de fonctions en escalier (ou si l'on veut, des suites de polynomes ou de fonctions continues) ; mais au lieu d'exiger de ces suites qu'elles soient bornées et alors convergentes, on se contente d'exiger qu'elles le deviennent après l'intégration, c'est-à-dire que leurs intégrales forment des suites numériques convergentes. Or on voit aisément que sous cette condition, les suites primitives, avant d'être intégrées, convergent aussi elles-mêmes, au moins presque partout. Alors, en définissant l'intégrale des fonctions limites par la limite de la suite intégrée, on passe de la classe des fonctions en escalier, disons de la classe C_0, à une classe C_1 plus large, laquelle d'ailleurs est intimement liée à la classe des fonctions semi-continues inférieurement. Bien entendu, on aura à prouver que l'intégrale ainsi définie ne dépend pas de la suite particulière choisie, mais seulement de la fonction limite. Or, cela se fait à l'aide d'un lemme très simple, conséquence immédiate du théorème de recouvrement de M. Borel, ou aussi du théorème de Dini, disant que lorsque une suite de fonctions en escalier va en décroissant vers o presque partout, la suite intégrée converge aussi vers o.

Enfin, après avoir introduit la classe C_1, on passe à la classe C_2 que l'on pourrait aussi désigner par $C_1 - C_1$ puisqu'elle est formée par l'ensemble des différences des fonctions appartenant à la classe C_1. Or on voit que si $f_1 - g_1 = f_2 - g_2$ pour quatre fonctions prises de la classe C_1, la relation analogue est valable aussi pour leurs intégrales, ce qui vient immédiatement du même fait concernant l'équation $f_1 + g_2 = f_2 + g_1$. Il s'ensuit que l'on peut définir, sans ambiguïté, l'intégrale de telles différences par la différence des intégrales respectives.

Quand on définit l'intégrale de cette manière, on aura à se demander, tout comme dans le cas de la définition dont je viens de parler, où l'on arrive si l'on répète le même procédé, mais en partant, au lieu de la classe C_0, de la classe plus générale C_2 ? Envisageons alors, au lieu de la classe C_2, la classe C_3 qui s'en déduit en y ajoutant toutes les fonctions, s'il y en a, qui ne diffèrent des fonctions déjà introduites que sur un ensemble de mesure nulle. J'ai dit s'il y en a parce qu'il n'y a pas lieu de s'y intéresser, les ensembles de mesure nulle étant à négliger dans toute la théorie. Cela étant, on voit peut-être encore plus facilement que pour l'autre définition, que notre classe est close, c'est-à-dire qu'on n'en sort pas en formant les limites des suites croissantes, bien entendu sous la condition que leurs intégrales restent bornées. De plus l'intégration terme à terme est permise. Vous savez que, dans la théorie de Lebesgue, ce fait, connu sous le nom de théorème de Beppo Levi, suffit pour en déduire les principaux théorèmes concernant l'intégration terme-à-terme ainsi que le lemme de Fatou. Il en est de même dans la théorie que je viens d'esquisser ; d'ailleurs, après avoir défini la mesure des ensembles par l'intégrale de leur fonction caractéristique, on parviendra vite à constater l'identité de notre intégrale et de celle de Lebesgue.

Parmi les autres définitions qui fournissent la même notion d'intégrale (il y en a plusieurs), je ne veux qu'en indiquer brièvement encore deux, la première ayant été introduite par M. Borel et développée par Hahn ; quant à la seconde qui est d'une nature toute différente et peut-être parente éloignée de la notion d'intégrale de M. Perron, j'y ai fait allusion dans ma conférence au congrès de Zürich en 1932 et je l'ai développée en tous ses détails dans les Annales de l'École Normale de Pise en 1936. Veuillez bien me pardonner de me citer moi-même tant de fois !

La définition Borel-Hahn se suggère en rappelant deux théorèmes

sur l'intégrale de Lebesgue. L'un, celui de Lusin, affirme que toute fonction sommable ou plus généralement, toute fonction mesurable peut être changée en fonction continue et cela en la modifiant seulement en des intervalles partiels, en nombre fini ou infini, mais d'une longueur totale arbitrairement petite. L'autre, le théorème d'Egoroff, dit que toute suite de fonctions mesurables qui converge presque partout, devient uniformément convergente quand on supprime de tels intervalles convenablement choisis. Alors la définition de l'intégrale que ces théorèmes suggèrent, consiste à considérer les fonctions qui peuvent être rendues continues en les modifiant sur des intervalles partiels de longueur totale arbitrairement petite et à former la limite de leurs intégrales. Bien entendu, il faut, par précaution, prendre garde que les modifications faites n'influencent pas sensiblement l'intégrale : par exemple, on supposera d'abord que la fonction est bornée et pour les changements, on restera entre les deux bornes de la fonction. Après, le passage à des fonctions non bornées se fera de la manière usuelle.

Quant à la seconde définition, à laquelle Lebesgue lui-même a fait déjà allusion dans son livre sur l'intégration, mais sans la formuler, elle correspond à la manière dont on passe à l'intégration à la fin du Calcul différentiel, dans la plupart des cours élémentaires d'Analyse, c'est-à-dire à la recherche d'une fonction dont la fonction donnée est une dérivée. Je ne pense pas ici à la belle et importante théorie de la totalisation que l'on doit à M. Denjoy. Tout simplement, lorsque une fonction $f(x)$ non négative, d'ailleurs quelconque, donnée sur un intervalle (a, b), est la dérivée presque partout d'une fonction croissante et par conséquent, de toute une foule de telles fonctions $F(x)$, on définit l'intégrale de $f(x)$ par la borne inférieure des variations $F(b) - F(a)$. De plus, on montre aisément que parmi nos $F(x)$, il en existe une, bien déterminée à une constante additive près, pour laquelle cette borne inférieure est atteinte justement et que cette même fonction fournit aussi la borne inférieure pour tous les intervalles partiels de l'intervalle (a, b), de sorte qu'on peut l'envisager comme l'intégrale indéfinie de $f(x)$. Enfin, quant aux fonctions $f(x)$ de signe variable, on procède ou bien en les décomposant en leurs parties positives et négatives ou bien on cherche, parmi les fonctions $F(x)$ dont elles sont la dérivée presque partout, celle dont la variation totale sur l'intervalle (a, b) est la plus petite possible. Tous les faits principaux découlent de cette définition avec une aisance surprenante et cela en ne s'appuyant, pour ainsi dire, que sur un

des théorèmes principaux de Lebesgue, affirmant que toute fonction monotone admet une dérivée presque partout. Quant à ce théorème, Lebesgue l'a énoncé et prouvé à la fin de son livre où il apparaît comme un corollaire de la théorie de l'intégration. Or, pour pouvoir y baser une telle théorie, il faut l'avoir démontré à l'avance indépendamment de la notion d'intégrale ou de celle de la mesure des ensembles ; c'est une tâche que, comme vous le voyez par exemple dans ma conférence du congrès de Zürich, plusieurs auteurs ont réussi à achever par des raisonnements de plus en plus élémentaires.

Mais peut-être ai-je parlé déjà assez des fonctions d'une seule variable. Heureusement, je n'aurai pas beaucoup à dire des fonctions de plusieurs variables. En effet, les diverses définitions de l'intégrale et la théorie qui s'y attache, peuvent être répétées presque sans changement, bien entendu, en remplaçant, dans la définition des fonctions en escalier et dans les autres détails, les intervalles linéaires par des rectangles, etc., ou comme on dit aussi, par des intervalles à plusieurs dimensions. C'est seulement la dernière définition, basée sur la notion de la dérivée, dont l'extension au cas de plusieurs variables ne se fait pas sans avoir préalablement analysé la notion de dérivée pour les fonctions additives de rectangles, etc. Mais heureusement on n'aura pas, pour notre but, à pénétrer dans les problèmes plus profonds concernant de telles dérivées ; en effet, on pourra se contenter de l'idée moins exigeante de dérivée par rapport à un réseau, comme s'en sert M. de la Vallée Poussin pour l'étude de la dérivation des fonctions additives d'ensemble Non seulement la démonstration de l'existence d'une telle dérivée d'une fonction monotone d'une seule variable est presque immédiate, mais on n'a presque rien à changer quand on passe au cas de plusieurs variables et les considérations concernant l'intégrale s'étendent à ce cas général avec des modifications évidentes. Il ne reste que peu de problèmes, comme par exemple ceux des intégrations successives et du changement de variables qui ne se posent que pour plusieurs variables ou exigent des considérations plus approfondies.

En parlant des réseaux, qu'il me soit permis de rappeler une méthode de transition qui permet de passer des fonctions d'une seule variable à celles de plusieurs variables, méthode découverte en 1909 simultanément par Lebesgue, M. de la Vallée Poussin et moi-même et laquelle s'applique, non seulement à l'intégrale ordi-

naire de Lebesgue, mais à celle de Stieltjes-Lebesgue et dont M. Jessen a su tirer parti pour l'intégration des fonctions à une infinité de variables. Qu'il me suffise ici de formuler ce principe sous sa forme la plus simple, pour le cas de deux variables. La méthode des réseaux permet d'établir une correspondance presque biunivoque entre un rectangle et un segment dont la longueur est égale à l'aire du rectangle et cela de sorte qu'à des ensembles mesurables correspondent de tels ensembles de même mesure, bien entendu dans le sens qui convient aux mots « mesurable » et « mesure » selon le nombre des dimensions. D'ailleurs, dans notre cas particulier de telles correspondances sont effectuées entre autres par la courbe de Peano ou par celle de Hilbert. Alors, étant donnée une fonction de deux variables $f(x, y)$, définie dans notre rectangle et $x=x(t)$, $y=y(t)$ étant les équations de la correspondance entre ce rectangle et un segment de l'axe des t, on n'aura qu'à introduire ces fonctions de t, au lieu des deux variables dans $f(x, y)$, c'est-à-dire faire correspondre à $f(x, y)$, fonction de deux variables, la fonction d'une seule variable $f[x(t), y(t)]$. Les deux fonctions qui se correspondent de cette façon seront en même temps sommables ou non et lorsqu'elles sont sommables, leurs intégrales admettent la même valeur. On peut donc profiter de notre correspondence pour passer immédiatement des fonctions d'une seule variable au cas de deux variables, la plupart des résultats se transportant d'une manière évidente. De plus, en opérant, non plus avec des rectangles, mais avec des intervalles dans des espaces de plusieurs ou même d'une infinité de dimensions, la théorie de l'intégration par rapport à une seule variable se transforme immédiatement en de sfaits d'un aspect plus général. La même idée s'applique aussi, avec un peu de précaution, aux intégrales de Stieltjes-Lebesgue et même, sous certaines hypothèses, aux intégrales des fonctions définies dans des ensembles abstraits dont nous allons parler.

Notre principe de transition nous forçait à bouleverser la structure des ensembles et à renoncer à la continuité, mais heureusement sans perdre beaucoup, Ne peut-on pas abandonner entièrement les ensembles de caractère géométrique et intégrer dans des ensembles abstraits? C'est ce qu'ont fait en 1915 M. Fréchet, fondateur de la topologie des ensembles abstraits, en étendant la méthode de Lebesgue à ce cas général et peu après M. Daniell qui se servit de l'idée du prolongement des fonctionnelles linéaires. Depuis, le premier ordre d'idées fut répété et continué par plusieurs auteurs, en parti-

culier en vue des exigences de la théorie des probabilités et de quelques sujets voisins. Qu'il me soit permis de ne parler que du second, très proche de l'une des méthodes dont je me suis servi plus haut pour l'intégrale de Lebesgue.

Soit E un ensemble quelconque ou, comme on dit, un ensemble abstrait. En désignant ses éléments par x, fixons une classe C_0 de fonctions $\varphi(x)$, comprenant toutes les combinaisons linéaires ainsi que les modules $|\varphi|$ des éléments de la classe. Pour ne pas compliquer les choses, nous supposons encore que la classe contienne l'unité, c'est la fonction $\varphi(x) \equiv 1$; quand il n'en est pas ainsi, le rôle de l'unité pourra être joué par d'autres fonctions strictement positives et cela sur l'ensemble E entier ou du moins sur les sous-ensembles qui nous intéressent.

Cela étant, envisageons une fonctionnelle $A = A\varphi$ et appelons-la l'intégrale des φ. Nous la supposons linéaire et aussi positive ; quant à cette dernière restriction, je me contente de dire qu'on peut s'en débarrasser grâce à un raisonnement ingénieux de M. Daniell ; je ne voudrais pas vous fatiguer en l'exposant. Alors, pour pouvoir copier le raisonnement, qui, lorsqu'il s'agissait de l'intégrale de Lebesgue, nous a conduit de la classe C_0 aux classes C_1, C_2 et C_3 en procédant par des suites monotones, nous aurons besoin de voir ce qui correspond aux deux propositions fondamentales, la première alléguant que $A\varphi_n \to 0$ lorsque $\varphi_n(x) \to 0$ en décroissant et presque partout, la seconde que pour les suites croissantes φ_n, l'hypothèse que $A\varphi_n$ reste bornée entraîne que $\varphi_n(x)$ converge presque partout vers une limite finie $f(x)$. Mais dans nos conditions plus générales qu'est ce qu'il faut entendre par « presque partout » ou ce qui revient au même, par « ensemble de mesure nulle ». Pour le définir, nous n'aurons qu'à remplacer la seconde proposition par une définition et cela en introduisant les ensembles de mesure nulle comme ceux pour lesquels une suite croissante $\varphi_n(x)$ peut diverger sans que la suite des $A\varphi_n$ cesse d'être bornée. Quant à la première proposition, nous aurons à la remplacer, avec M. Daniell, par une hypothèse, du moins partiellement ; nous supposerons que $A\varphi_n \to 0$ lorsque $\varphi_n(x) \to 0$ en décroissant *partout*. Cela posé on montre aisément que le terme « partout » peut être remplacé par « presque partout ». En effet, supposons que $\varphi_n(x) \to 0$ sauf un ensemble e_0 de mesure nulle et soit $\psi_n(x)$ une suite choisie de sorte qu'elle diverge sur e_0 tandis que $A\psi_n$ reste bornée ; par des raisons d'homogénéité, nous pouvons supposer que $A\psi_n$ reste au-dessous d'un ε arbitrairement petit. Alors

la fonction $(\varphi_n - \psi_n)^+$ (partie positive de $\varphi_n - \psi_n$) tend *partout* vers o et alors, par hypothèse, $A(\varphi_n - \psi_n)^+ \to 0$; de plus

$$A\varphi_n = A(\varphi_n - \psi_n) + A\psi_n \leqslant A(\varphi_n - \psi_n)^+ + \varepsilon \to \varepsilon$$

ou, ε étant arbitrairement petit, il s'ensuit que $A\varphi_n \to 0$, ce qu'il fallait prouver.

Maintenant qu'on dispose des deux propositions fondamentales, la théorie se développe parallèlement à celle de l'intégrale de Lebesgue et fournit les mêmes conséquences, sauf une seule. C'est le théorème affirmant l'intégrabilité des fonctions composées. En général, ce théorème sera en défaut lorsque la classe C_0 n'est pas supposée comprendre les produits de ses éléments ; toutefois à ce défaut il pourra être remédié par l'adjonction des limites des suites uniformément convergentes. Quand il s'agit seulement de passer de f à f^2, on peut aussi raisonner en partant de la formule

$$f^2 = \sup(2\lambda|f| - \lambda^2)$$

où λ parcourt le demi-axe positif ou seulement une suite λ_n partout dense, par exemple celle des nombres rationnels. Donc f^2 n'est que la limite de la suite croissante des enveloppes supérieures

$$g_n = \sup_{m \leq n} (2\lambda_m|f| - \lambda_m^2)$$

et il vient immédiatement de la théorie générale que les g_n sont sommables et qu'il en est de même de leur limite f^2 toujours qu'il existe une fonction majorante sommable $h(x) \geqslant f^2(x)$. Cela suffit pour étendre les idées concernant l'espace fonctionnel L^2 à notre cas général. En particulier, le théorème sur la représentation des fonctionnelles linéaires sous forme d'intégrale reste valable et nous aide entre autres à regarder sous un aspect très général des problèmes de différentiation et du changement des variables dans les intégrales.

Mais le temps me presse et je n'ai pas encore parlé du développement de l'idée de l'intégrale au cours des 10 ou 15 dernières années. Malheureusement, pendant la plus grande partie de cette période, les difficultés de guerre et d'après-guerre m'ont empêché de suivre régulièrement ce qui se passait et en particulier, à propos de quelques auteurs français, qui se sont occupés de certains sujets dont j'ai commencé l'étude et m'ont même honoré en donnant mon nom à quelques notions, je n'ai pas réussi à pénétrer suffisamment dans le langage et l'écriture créés par la société anonyme Bourbaki

pour les comprendre entièrement. C'est donc très peu que j'ose parler de cette période. Pour commencer, je vous prie de nouveau de m'excuser si je parle tout d'abord de moi-même ; mais ce sont mes propres travaux que je connais le mieux. Déjà en 1928, au congrès de Bologne, en connexion avec le théorème de Jordan concernant la décomposition des fonctions à variation bornée en des parties monotones et un théorème plus subtil de Lebesgue que l'on aime à citer aujourd'hui sous le nom de théorème de Lebesgue-Nikodym, j'ai introduit la notion de la plus petite majorante d'un ensemble d'opérations linéaires et je m'en suis servi pour décomposer les opérations en des parties régulières et singulières. Là je me suis borné, à titre d'exemple, au cas des fonctions continues et j'ai montré, entre autres, que ces parties peuvent être caractérisées et construites sans avoir recours à l'expression analytique de l'opération sous forme d'intégrale de Stieltjes. J'ai repris le même sujet, sous une forme très générale, dans un mémoire paru d'abord en 1936 en langue hongroise, dans les communications de l'Académie hongroise, et dont une version en langue française, avec des modifications légères, fut imprimée en 1940 dans les Annals of Mathematics. D'ailleurs, j'apprends que sans me consulter, on l'a traduit aussi en langue russe. A peu près au même temps ont aussi paru des travaux importants de MM. Freudenthal, Kantorovitch et Garrett Birkhoff sur les modules semiordonnés et les lattices linéaires qui sont en relation intime avec mon sujet. Pour être bref, ce qui peut nous intéresser du point de vue de ma conférence d'aujourd'hui, c'est que je n'y parle ni d'ensembles de points ni de fonctions, mais c'est le rôle des fonctions elles-mêmes qui est joué par des éléments abstraits, d'ailleurs soumis à très peu d'hypothèses concernant leur addition. Alors on voit aisément que les opérations linéaires définies pour des classes de tels éléments forment des lattices linéaires et c'est de cette sorte que mon Mémoire se change, en réalité, en l'étude d'un calcul des lattices linéaires. Un autre ordre d'idées très général fut introduit par M. Carathéodory dans un Mémoire sur l'algébraïsation de la notion d'intégrale paru en 1938 dans les « Sitzungsberichte » de Munich. Ses idées furent aussi continuées par M. Bischof dans sa thèse très intéressante, présentée à l'Université de Berlin en 1940 et M. Carathéodory lui-même y est revenu l'année suivante, les appliquant au théorème de Riesz-Fischer et à la théorie ergodique.

Faute de temps je ne peux pas entrer dans les détails et je regrette aussi de ne pouvoir parler des généralisations de l'intégrale de

Lebesgue dans lesquelles les fonctions, au lieu de prendre des valeurs numériques, font correspondre à la variable des éléments appartenant à certains espaces vectoriels. Je me contente de mentionner une des applications les mieux connues ; c'est l'expression des transformations autoadjointes de l'espace de Hilbert sous forme d'intégrale étendue à leur spectre. Peut-être aurais-je dû aussi parler du rôle que les ensembles de mesure nulle et leurs analogues en Théorie du potentiel, les ensembles de capacité nulle, jouent dans l'analyse des fonctions analytiques et de celles harmoniques et sousharmoniques, comme on le trouve exposé en particulier dans les travaux de MM. Brelot et Henri Cartan.

Je ne peux finir ma conférence sans citer une série de notes de M. Stone dans les « Proceedings » de Washington dont la quatrième vient de paraître dans le fascicule de janvier de cette année. Dans ces notes il s'agit d'une analyse axiomatique de l'idée d'intégrale, en particulier de celle de Daniell ; d'ailleurs, à ce que M. Stone observe, son analyse est très voisine d'une autre, par Bourbaki, mais qui attend encore de paraître.

Ainsi la théorie de Lebesgue ne cesse pas d'évoluer ; espérons qu'elle ne perdra pas la simplicité et la fraîcheur de sa première jeunesse.

SUR UN THÉORÈME GÉNÉRAL DE PROBABILITÉ

par **Alfred RÉNYI** (*) (Budapest).

Le but du présent article est de donner une généralisation d'un théorème que j'ai exposé dans un travail précédent [1]. En même temps que ce théorème présente un intérêt en lui-même, c'est-à-dire comme un théorème du calcul des probabilités, et il a des applications à la statistique mathématique, sur lesquelles j'espère revenir, je ferai remarquer qu'il doit son origine à la théorie des nombres, notamment à mes recherches concernant l'hypothèse de Goldbach [2]. En effet, ce théorème peut être considéré comme une généralisation du « grand crible » de M. Linnik [3] qui à son tour peut être déduit de ce théorème général. Cependant dans le présent article je n'insiste pas sur ces applications [4].

Soit donné un ensemble E, dont les éléments seront dénotés par ξ. Soit donné un corps F borélien des parties de E. Les parties de E appartenant à F seront notées A, B, ... et appelées des événements. Soit donnée une fonction absolument additive d'ensemble non-négative, définie pour toute partie A de E appartenant à F, qui sera notée P(A) et appelée la probabilité de l'événement A ; supposons finalement que $P(E) = 1$. Autrement dit nous envisageons un champ de probabilité au sens de M, Kolmogoroff [5].

(*) Conférence faite à l'Institut Fourier de l'Université de Grenoble, le 1er juillet 1949.

(1) A. Rényi, *Un nouveau théorème concernant les fonctions indépendantes etc.* (Journal de Math. XXVIII, Fasc. 2, 1949, p. 137-149).

(2) A. Rényi, *Sur la représentation des nombres pairs comme la somme d'un nombre premier et d'un nombre presque premier* (Bull. Acad. Sci. U. R. S. S. série math. 12, n° 1, 1948, p. 57-78).

(3) U. V. Linnik, *The large sieve* (C. R. Acad. Sci. U. R. S. S., 30, n° 4, 1941, p. 290-292).

(4) Paraîtra prochainement. Voir aussi *l. c.* (1).

(5) A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Ergebnisse d. Math. u. Grenzgebiete, 1933).

Introduisons d'abord quelques définitions bien connues. Une fonction à valeurs réelles $x = x(\xi)$ définie sur E sera appelée une variable aléatoire si elle est mesurable par rapport à P. La valeur probable $e(x)$ d'une variable aléatoire x est, par définition, l'intégrale de x par rapport à la mesure P et étendu sur E, c'est-à-dire

$$(1) \qquad e(x) = \int_E x \, dP.$$

La valeur probable d'une variable aléatoire x relative à l'événement A ayant une probabilité $P(A) > 0$, sera notée $e_A(x)$ et définie par

$$(2) \qquad e_A(x) = \frac{1}{P(A)} \int_A x \, dP.$$

Notons $\sigma^2(x)$ le carré de l'écart moyen de x, défini par

$$(3) \qquad \sigma^2(x) = e\left[\left(x - e(x)\right)^2\right].$$

Soit pour t réel quelconque $A^x(t)$ l'ensemble des éléments ξ de E pour lesquels $x(\xi) < t$, c'est-à-dire soit $A^x(t)$ l'événement $x < t$, et posons $V^x(t) = P\left(A^x(t)\right)$, en d'autres mots, soit $V^x(t)$ la fonction de distribution de x. Soit $I = [a, b]$ l'intervalle $a \leq t < b$ de l'axe réel R, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Pour notre but il est plus commode d'utiliser au lieu de $V^x(t)$ la fonction d'intervalle $V^x[I]$ définie pour $I = [a, b]$ par

$$(4) \qquad V^x[I] = V^x(b) - V^x(a).$$

Quand nous parlons dans ce qui suit de la fonction de distribution de x, nous entendons toujours la fonction d'intervalle $V^x[I]$. Evidemment $V^x[I]$ est une fonction d'intervalle additive et non-négative, et nous avons $V^x[R] = 1$ où R désigne tout l'axe réel. Si $A^x[I]$ désigne l'ensemble des éléments ξ de E pour lesquels la valeur $x(\xi)$ est contenue dans l'intervalle I, c'est-à-dire si $A^x[I]$ désigne l'événement $x \in I$, nous avons évidemment $P(A^x[I]) = V^x[I]$. Nous appelons les variables x et y indépendantes si pour toutes les paires d'intervalles I_1, I_2, nous avons

$$(5) \qquad P\left(A^x[I_1] \cdot A^y[I_2]\right) = P\left(A^x[I_1]\right) \cdot P\left(A^y[I_2]\right).$$

Il s'ensuit que si x et y sont indépendantes, alors pour tout I

$$(6) \qquad e_{A^x[I]}(y) = e(y).$$

Maintenant nous allons donner quelques définitions nouvelles. Dans un article antérieur nous avons introduit la notion de fonction de distribution $V^x_B[I]$ de x relative à l'événement B (où nous supposons $P(B) > 0$) définie par

$$V^x_B[I] = \frac{P(A^x[I] . B)}{P(B)} \tag{7}$$

et aussi une quantité mesurant l'écart entre $V^x_B[I]$ et $V^x[I]$. Cette dernière quantité était définie (à un facteur près) par la formule

$$D^2_B(x) = \frac{P(B)}{1 - P(B)} \int \frac{\left(V^x_B[I] - V^x[I]\right)^2}{V^x[I]}. \tag{8}$$

L'intégrale dans (8) est l'intégrale de Burkill [6] de la fonction d'intervalle qui figure sous le signe de l'intégrale, et est étendue à tout l'axe réel R. Dans ce qui suit nous appellerons la quantité $D_B(x)$ — supposée non-négative — la discrépance de x par rapport à l'événement B. La notion de discrépance — qui s'est montrée bien utile — peut être considérée comme une généralisation de la notion de coefficient de corrélation. En effet, si la variable x est la variable caractéristique d'un événement A (bien entendu $P(A) > 0$) c'est-à-dire si $x(\xi) = 1$ pour $\xi \epsilon A$ et $x(\xi) = 0$ dans le cas contraire, alors $D_B(x)$ devient égal à l'expression

$$\frac{|P(AB) - P(A) . P(B)|}{\sqrt{P(A)(1 - P(A))P(B)(1 - P(B))}}$$

c'est-à-dire sera égal au coefficient de corrélation des événements A et B. Dans ce qui suit nous aurons besoin d'étendre la notion de discrépance ; nous allons envisager la discrépance d'une variable aléatoire x par rapport à une autre variable aléatoire y. Pour arriver à une généralisation naturelle de la quantité (8) pour ce cas, nous transformons la formule (8) comme suit : soit y_B la variable caractéristique de l'événement B, alors nous avons

$$V^x_B[I) = \frac{V^x[I] . e_{A^x[I]}(y_B)}{e(y_B)}. \tag{9}$$

Il s'ensuit que

$$D^2_B(x) = \frac{1}{\sigma^2(y_B)} \int_B [e_{A^x[I]}(y_B) - e(y_B)]^2 V^x[I] \tag{10}$$

([6]) Voir p. e. S. Kempisty, *Fonctions d'intervalle non additives* (Act. Sci. et Ind.).

en vertu de $\sigma^2(y_B) = P(B)\big(1 - P(B)\big)$. Alors, en posant au lieu de y_B dans (10) une variable aléatoire y quelconque (nous supposons seulement que y n'est pas presque sûrement constante, c'est-à-dire que $\sigma^2(y) > 0$) autrement dit, en posant

$$(11) \qquad D_y^2(x) = \frac{1}{\sigma^2(y)} \int_R [e_{A^x[I]}(y) - e(y)]^2 V^x[I]$$

nous obtenons une définition de la discrépance $D_y(x)$ de x par rapport à y, qui est une généralisation directe de la formule (8) à laquelle elle se réduit pour $y = y_B$, c'est-à-dire si y est une variable caractéristique, et par conséquent $D_y(x)$ se réduit au coefficient de corrélation si non seulement y mais aussi x est une variable caractéristique.

Notons quelques propriétés de la discrépance $D_y(x)$ définie par la formule (11). Si x et y sont indépendantes, nous avons (en vertu de (6)) $D_y(x) = 0$. Si x et y sont presque sûrement égales (c'est-à-dire si la probabilité de $x = y$ est égale à 1), nous avons $D_y(x) = 1$. En effet, supposons que x ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ (autrement dit, supposons que x est une « variable en escalier ») et posons $P(x = x_i) = p_i$, alors nous avons

$$D_x^2(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)} \sum_{i=1}^{n} p_i\big(x_i - e(x)\big)^2 = \frac{\sigma^2(x)}{\sigma^2(x)} = 1$$

d'où vient que $D_x(x) = 1$ pour tout x (bien entendu $\sigma^2(x) > 0$) parce que chaque variable x peut être approchée en mesure par des variables en escalier. En général nous avons $0 \leq D_y(x) \leq 1$. Pour démontrer la seconde inégalité, notons d'abord que $D_y(x)$ reste invariant si nous remplaçons y par $y - c$ où c est un constant (où c est presque sûrement constant), parce que $e(y-c) = e(y) - c$ et aussi $e_A(y-c) = e_A(y) - c$ pour tout A. Alors si nous posons $Y = y - e(y)$, nous avons en vertu de $e(Y) = 0$,

$$(12) \qquad D_y^2(x) = D_Y^2(x) = \frac{1}{e(Y^2)} \int_R e_{A^x[I]}^2(Y) V^x[I].$$

Soit $z(x, I)$ la variable caractéristique d'évévement $A^x(I)$, alors nous avons

$$(13) \qquad e_{A^x[I]}(Y) = \frac{1}{V^x[I]} \int_E Y \,.\, z(x, I)\, dP.$$

En appliquant l'inégalité bien connue de Schwarz, nous obtenons

$$e^2_{A^x[I]}(Y) \leq \frac{1}{(V^x[I])^2} \int_E Y^2 z(x, I)\, dP \int_E z(x, I)\, dP.$$

Ainsi en utilisant les relations évidentes

$$\int_E z(x, I)\, dP = V^x[I] \qquad \text{et} \qquad \int_R z(x, I) = 1,$$

nous obtenons que

$$D^2_Y(x) \leq \frac{1}{e(Y^2)} \int_R \int_E Y^2 . z(x, I)\, dP = \frac{\int_E Y^2\, dP}{e(Y^2)} = \frac{e(Y^2)}{e(Y^2)} = 1,$$

ce qui démontre l'assertion $D_y(x) \leq 1$. Remarquons encore, que $D_y(x)$ ne dépend pas des valeurs numériques de x mais seulement de la distribution de ces valeurs. Autrement dit si $f(t)$ est une fonction mesurable de la variable réelle t à valeurs réelles, de plus univalente, c'est-à-dire $f(t_1) \neq f(t_2)$ pour $t_1 \neq t_2$, et si nous posons $z(\xi) = f\big(x(\xi)\big)$, nous avons $D_y(z) = D_y(x)$; en particulier nous pouvons remplacer x par $X = x - e(x)$. Pour démontrer cette proposition, il suffit, comme plus haut, de le démontrer pour x variable en escalier, qui prend seulement les valeurs x_i ($i = 1, 2, \ldots n$). Posons $P(x = x_i) = p_i$, alors nous avons

$$D^2_y(x) = \frac{1}{\sigma^2(y)} \sum_{i=1}^{n} p_i \big[e_{(x=x_i)}(y) - e(y)\big]^2$$

et on voit immédiatement que $D_y(x)$ reste invariant en remplaçant x par $z = f(x)$ parce que l'ensemble des éléments ξ de E pour lesquels $x = x_i$ est identique à l'ensemble des éléments ξ pour lesquels $z = z_i = f(x_i)$. Si nous laissons tomber la restriction sur l'univalence de $f(x) = z$, alors nous avons $D_y(z) \leq D_y(x)$. Ceci découle du fait que $Q(I) = \big(e_{A^x[I]}(y) - e(y)\big)^2 V^x[I]$ figurant sous le signe d'intégrale dans la définition de $D_y(x)$ est une fonction sous additive d'intervalle, c'est-à-dire que si I_1 et I_2 sont des intervalles sans point commun, $Q(I_1 + I_2) \leq Q(I_1) + Q(I_2)$. En effet, en vertu de (13), $Q(I)$ peut se mettre sous la forme $\frac{(Q_1(I))^2}{Q_2(I)}$ ou $Q_1(I)$ et $Q_2(I)$ sont des fonctions additives d'intervalle, et la sous-additivité de $Q(I)$ est une consé-

quence de l'inégalité élémentaire $\frac{(a+b)^2}{c+d} \leqq \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{d}$ valable pour $c > 0$, $d > 0$, a, b réels.

Nous avons encore besoin d'une notion nouvelle, celle de suite de variables aléatoires « presque indépendantes deux-à-deux ». Soient x et y deux variables aléatoires et soit $d(x, y)$ la borne supérieure de

$$(14) \qquad \left| \frac{P\left(A^x[I^1]A^y[I_2]\right)}{P\left(A^x[I_1]\right)P\left(A^y[I_2]\right)} - 1 \right|$$

pour toutes les paires d'intervalles I_1 et I_2 pour lesquelles

$$P\left(A^x[I_1]\right) . P\left(A^y[I_2]\right) \neq 0.$$

Nous appellerons la suite $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite de variables presque indépendantes deux-à-deux si la forme quadratique

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} d(x_n, x_m) t_n t_m$$

est bornée, c'est-à-dire s'il existe une constante Δ telle que

$$(15) \qquad \left| \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} d(x_n, x_m) t_n t_m \right| \leqq \Delta \sum_{n=1}^{\infty} t_n^2$$

pour toute suite de nombres réels $t_n (n = 1, 2, \ldots)$ pour lesquels $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2 < \infty$. Dans ce cas nous appellerons Δ le module de dépendance de la suite $\{x_n\}$. Il est clair que si les variables x_n sont indépendantes deux-à-deux, alors $d(x_n, x_m) = 0$ pour tout $n \neq m$ et ainsi (15) aura lieu avec $\Delta = 0$.

Cela posé nous pouvons énoncer notre

THÉORÈME : *Soit $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite de variables presque indépendantes deux-à-deux, soit Δ le module de dépendance de la suite $\{x_n\}$, et soit y une variable aléatoire quelconque. Dans ces conditions l'inégalité*

$$(16) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} D_y^2(x_n) \leqq (1 + \Delta)\left(1 + \left(\frac{e(y)}{\sigma(y)}\right)^2\right)$$

aura lieu.

L'inégalité (16) est exacte pour les suites de variables indépendantes, car dans ce dernier cas la variable aléatoire y peut être choisie d'une telle manière que dans (16) l'égalité aura lieu. En effet posons $y = x_1 - e(x_1)$, alors $D_y(x_n) = 0$ pour $n = 2, 3, \ldots$, $D_y(x_1) = 1$ et $e(y) = 0$, et par conséquent (16) se réduit à $1 = 1$. Notons encore que dans l'article (1) nous avons démontré (16) dans un cas spécial, notamment pour y égale à une variable caractéristique d'un événement, et avec une définition plus restreinte de presque indépendance.

Pour la démonstration du théorème énoncé, nous avons besoin du lemme suivant, qui exprime le fait que l'inégalité connue de Bessel peut être généralisée pour les systèmes de fonctions quasi-orthogonales. Ce lemme — pour le cas des fonctions d'une variable réelle — est dû à M. Boas, Jr. (7).

Nous appelons une suite de variables aléatoires $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ définies sur E un système quasi-orthogonal, si en posant $c_{nm} = \int_E \varphi_n \varphi_m dP$, la forme quadratique $\sum_1^\infty \sum_1^\infty c_{nm} t_n t_m$ est bornée, c'est-à-dire s'il existe un constant K tel que

$$\left| \sum_1^\infty \sum_1^\infty c_{nm} t_n t_m \right| \leqq K \sum_1^\infty t_n^2 \qquad \text{pour} \qquad \sum_1^\infty t_n^2 < \infty.$$

Nous appellerons K la borne du système quasi-orthogonal $\{\varphi_n\}$. Alors nous avons le suivant

LEMME : *Si* $\{\varphi_n\}$ *est un système quasi-orthogonal avec la borne* K, *et si pour une variable aléatoire* y *quelconque nous posons* $\int_E y \varphi_n dP = \gamma_n$, *alors nous avons* $\sum_1^\infty \gamma_n^2 \leqq K \,.\, e(y^2)$.

La démonstration de ce lemme est très simple. En effet pour tout N entier, nous avons

$$\int_E \left(y - \frac{1}{K} \sum_1^N \gamma_n \varphi_m \right)^2 dP = e(y^2) - \frac{2}{K} \sum_1^N \gamma_n^2 + \frac{1}{K^2} \sum_1^N \sum_1^N c_{nm} \gamma_n \gamma_m \geqq 0.$$

(7) R. P. BOAS Jr., *A general moment problem* (Amer. Journ. Math., 1941, p. 361-370).

Mais par hypothèse $\sum_{1}^{N}\sum_{1}^{N} c_{nm}\gamma_n\gamma_m \leq K\sum_{1}^{N}\gamma_n^2$, et ainsi on obtient

$$e(y^2) \geq \frac{1}{K}\sum_{1}^{N}\gamma_n^2.$$

Faisons tendre N vers ∞, nous obtenons notre Lemme.

Démontrons maintenant notre théorème. Choisissons pour tout $n = 1, 2, \ldots$ une décomposition arbitraire de l'axe réel en un nombre fini d'intervalles I_{ni} $(i = 1, 2, \ldots N_n)$ sans point commun. Soit $A_i^{x_n}$ la partie de E telle que $x_n(\xi) \epsilon I_{ni}$ pour $\xi \epsilon A_i^{x_n}$. Posons $P(A_i^{x_n}) = P_{ni}$, évidemment il vient

$$\sum_{i=1}^{N_n} P_{ni} = 1 \tag{17}$$

parce que par hypothèse nous avons $I_{n_1} + I_{n_2} + \cdots I_{nN_n} = R$ où R désigne tout l'axe réel. Soit Φ_{ni} la variable caractéristique de $A_i^{x_n}$ et posons

$$\varphi_{ni} = \frac{\Phi_{ni} - P_{ni}}{\sqrt{P_{ni}}} \tag{18}$$

(bien entendu, sans restreindre la généralité, nous envisageons seulement les décompositions $\{I_{ni}\}$ pour lesquelles tous les P_{ni} sont positives). Soit

$$c_{nmij} = \int_E \varphi_{ni}\varphi_{mj}\,dP. \tag{19}$$

Nous avons pour $n \neq m$ l'inégalité

$$|c_{nmij}| = \sqrt{P_{ni}P_{mj}}\left|\frac{P(A_i^{x_n}A_j^{x_m})}{P(A_i^{x_n}A_j^{x_m})} - 1\right| \leq \sqrt{P_{ni}P_{mj}}\,.\,d(x_n, x_m) \tag{20}$$

puis pour $i \neq j$

$$c_{nnij} = -\sqrt{P_{ni}P_{nj}} \tag{21}$$

et finalement

$$c_{nnii} = 1 - P_{ni}. \tag{22}$$

Utilisant ces formules nous allons montrer que la suite à double

entrée $\{\varphi_{ni}\}$ $(n=1, 2, \ldots; i \leqq N_n)$ est un système quasi-orthogonal, ayant la borne $K = 1 + \Delta$, où Δ est le module de dépendance de la suite presque indépendant $\{x_n\}$.

En effet, en posant tout de suite t_{ni} à double entrée

$$(n=1, 2, \ldots; \quad i=1, 2, \ldots N_n)$$

$$(23) \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{N_m} c_{nmij} t_{ni} t_{mj} \qquad \text{et} \qquad \theta_n = \sum_{i=1}^{N_n} t_{ni}\sqrt{P_{ni}}$$

nous obtenons, en vertu des relations (20), (21) et (22):

$$(24) \qquad |S| \leqq \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} d(x_n, x_m)\theta_n\theta_m + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{N_n} t_{ni}^2 - \theta_n^2\right).$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, et en posant

$$(25) \qquad T_n = \sum_{i=1}^{N_n} t_{ni}^2,$$

puis tenant compte de (17), on obtient $\theta_n \leqq T_n^{\frac{1}{2}}$ et

$$(26) \qquad |S| \leqq \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} d(x_n, x_m) T_n^{\frac{1}{2}} T_m^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n.$$

Ainsi, d'après la définition du module de dépendance Δ, il vient

$$(27) \qquad |S| \leqq (1+\Delta)\sum_{n=1}^{\infty} T_n = (1+\Delta)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N_n} t_{ni}^2$$

ce qui démontre que le système $\{\varphi_{ni}\}$ est quasi-orthogonal, avec $K = 1 + \Delta$. Alors, notre lemme nous donne, si nous posons

$$(28) \qquad \gamma_{ni} = \int_E y\varphi_{ni}\, dP \quad (n=1, 2, \ldots; \ i \leqq N_n),$$

l'inégalité

$$(29) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N_n} \gamma_{ni}^2 \leqq (1+\Delta) e(y^2).$$

En vertu de (18) un calcul simple donne

$$(30)\qquad \gamma_{ni}^2 = \left(e_{A_i^{x_n}}(y) - e(y)\right)^2 V^{x_n}[I_{ni}]\,;$$

alors faisant usage de (29) et (30), on obtient, en posant

$$(31)\qquad D_n = \sum_{i=1}^{N_n} \gamma_{ni}^2 = \sum_{i=1}^{N_n} \left(e_{A_i^{x_n}}(y) - e(y)\right)^2 V^{x_n}[I_{ni}]$$

que

$$(32)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} D_n \leqq (1+\Delta)e(y^2).$$

D'autre part, pour une fonction sous-additive d'intervalle $F(I)$ l'intégrale de Burkill $\int F(I)$ est égale à la borne supérieure de la somme $\Sigma F(I_k)$, pour toute décomposition $\{I_k\}$ de l'axe réel en un nombre fini d'intervalles sans points communs (voir (6)). Ainsi la borne supérieure de D_n est égale à $\sigma^2(y)D_y^2(x_n)$ et tenant compte du fait que les décompositions sont tout à fait arbitraires, nous obtenons

$$(33)\qquad \sigma^2(y)\sum_{n=1}^{\infty} D_y^2(x_n) \leqq (1+\Delta)e(y^2).$$

Comme évidemment $\dfrac{e(y^2)}{\sigma^2(y)} = 1 + \left(\dfrac{e(y)}{\sigma(y)}\right)^2$, (33) est exactement l'énoncé de notre théorème, qui est ainsi démontré.

(Manuscrit reçu en août 1949.)

SUR LES MOYENNES ARITHMETIQUES DES SUITES DE FONCTIONS ORTHOGONALES

par **I. S. GAL** (Paris).

---

1. Nous supposerons, dans ce qui suit, que la suite de fonctions $\varphi_\nu(x)$ est orthonormale dans un intervalle (a, b), c'est-à-dire que

$$\int_a^b \varphi_N(x)^2\,dx = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \varphi_M(x)\varphi_N(x)\,dx = 0$$

pour $M \neq N = 1, 2, \ldots$.

M. H. Rademacher[1] a démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_N(x) = o\left(N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right) \tag{1}$$

presque partout dans (a, b). Maintenant je me propose d'examiner la moyenne arithmétique des fonctions $\varphi_\nu(x)$ et de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Si la suite de fonctions $\varphi_\nu(x)$ est orthonormale dans l'intervalle (a, b), alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a*

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(1 - \frac{\nu - 1}{N}\right)\varphi_\nu(x) = o\left(N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \tag{2}$$

presque partout dans $a \leqslant x \leqslant b$.

Avant de commencer la démonstration je voudrais noter qu'on peut démontrer un résultat un peu plus fort que le théorème que je viens d'énoncer. D'une part, pour avoir les relations (1) et (2) il suffit de supposer que les fonctions $\varphi_\nu(x)$ sont *presque-orthogonales* dans l'intervalle (a, b). D'autre part on peut remplacer le facteur $(\log N)^\varepsilon$ par

$$(\log_2 N)^{\frac{1}{2}} \ldots (\log_k N)^{\frac{1}{2}} (\log_{k+1} N)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

(1) H. RADEMACHER, *Math. Annalen*, Bd. 87 (1922), p. 122.

où $\log_{k+1} N = \log(\log_k N)$ pour $k = 1, 2, \ldots$. Cependant je laisserai de côté de telles précisions.

2. Le théorème 1 est une simple conséquence d'un résultat général, qui a été démontré par M. J. F. Koksma et moi-même (²). Un cas particulier de ce dernier s'énonce comme suit :

Théorème auxiliaire. — *Supposons que les fonctions $f_\nu(x)$ appartiennent à la classe $L^2(a, b)$ et que*

$$\int_a^b \left(f_{M+1}(x) + f_{M+2}(x) + \cdots + f_{M+N}(x)\right)^2 dx \leqslant N^2(M+N)^\alpha$$

pour tout M, N $\geqslant 0$, *alors*

$$(3) \qquad f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_N(x) = o\left(N^{2+\alpha} (\log N)^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

presque partout dans (a, b).

Posons maintenant

$$f_\nu(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_\nu(x),$$

par conséquent nous avons

$$f_{M+1} + \cdots + f_{M+N} = N \sum_{\nu=1}^{M} \varphi_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} (N - \nu + 1)\varphi_{M+\nu}.$$

Donc, puisque la suite φ est orthonormale, nous obtenons

$$\int_a^b (f_{M+1} + f_{M+2} + \cdots f_{M+N})^2 dx =$$
$$= N^2 M + \sum_{\nu=1}^{N} (N - \nu + 1)^2 \leqslant N^2(M+N)$$

pour tout M, N $\geqslant 0$. Ainsi on peut utiliser le théorème auxiliaire et l'on a

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_N = \sum_{\nu=1}^{N} (N - \nu + 1)\varphi_\nu = o\left(N^3 (\log N)^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(1 - \frac{\nu - 1}{N}\right)\varphi_\nu(x) = o\left(N (\log N)^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

pour presque tout x, $a \leqslant x \leqslant b$.

Remarquons encore une autre conséquence du théorème auxiliaire :

(²) I. S. Gál et J. F. Koksma, Comptes rendus 227 (1948), p. 1321 et I. S. Gál, Comptes Rendus 228 (1949), p. 638.

THÉORÈME 2. — *Si les fonctions $f_\nu(x)$ sont telles que*

$$\int_a^b f_\nu(x)^2\,dx \leqslant 1$$

pour $\nu = 1, 2, \ldots,$ *alors*

$$(4)\qquad f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_N(x)=o\left(N(\log N)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

presque partout (a, b).

En effet, en vertu de l'inégalité de Schwarz nous avons

$$(f_{M+1}+f_{M+2}+\cdots+f_{M+N})^2 \leqslant N(f_{M+1}^2+f_{M+2}^2+\cdots+f_{M+N}^2)$$

donc d'après l'hypothèse

$$\int_a^b (f_{M+1}+f_{M+2}+\cdots+f_{M+N})^2\,dx \leqslant N\sum_{\nu=1}^{N}\int_a^b f_{M+\nu}(x)^2\,dx \leqslant N^2.$$

Ainsi, en utilisant le théorème auxiliaire pour le cas $\gamma = 0$, il résulte (5) pour presque tout x, $a \leqslant x \leqslant b$.

3. Pour compléter nos démonstrations, il nous faut prouver la validité du théorème auxiliaire. La démonstration suivante est une forme simplifiée de notre démonstration avec M. J. F. Koksma. Je communiquerai ultérieurement une autre démonstration pour la cas général.

Soit donné le nombre $\varepsilon > 0$ à l'avance. Pour obtenir le résultat du théorème auxiliaire il suffit de démontrer que la relation (3) est valable partout dans $a \leqslant x \leqslant b$ sauf sur un ensemble de mesure δ, où $\delta > 0$ est arbitrairement petit. Prenons un entier quelconque $N \geqslant 2$ et choisissons l'entier n de telle sorte que $2^n \leqslant N < 2^{n+1}$. Nous avons donc

$$(5)\qquad \begin{aligned} f_1+f_2+\cdots+f_N &= \\ &=(f_1+f_1+\cdots+f_{2^n})+(f_{2^n+1}+f_{2^n+2}+\cdots+f_N) \end{aligned}$$

pour tout N satisfaisant à : $2^n < N < 2^{n+1}$. Ainsi notre théorème est établi si nous démontrons les propositions suivantes :

$$1^\circ \qquad f_1+f_2+\cdots+f_{2n}=o(2^{(2+\alpha)n}.n^{1+\varepsilon})^{\frac{1}{2}}$$

partout dans $a \leqslant x \leqslant b$ sauf sur un ensemble de mesure inférieure à $\dfrac{\delta}{2}$.

$$2^\circ \qquad f_{2^n+1}+f_{2^n+2}+\cdots+f_N=o(2^{(2+\alpha)n}.n^{1+\varepsilon})^{\frac{1}{2}}$$

uniformément en N ; $2^n < N < 2^{n+1}$ et partout dans $a \leqslant x \leqslant b$ sauf sur un ensemble de mesure inférieure à $\frac{\delta}{2}\cdot$

En effet, d'après $2^n < N < 2^{n+1}$ nous avons

$$2^{(2+\alpha)n}\,.\,n^{1+\varepsilon} = o\left(N^{2+\alpha}(\log N)^{1+\varepsilon}\right)$$

donc en utilisant 1° et 2° nous obtenons selon (5) que

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_N = o\left(N^{2+\alpha}(\log N)^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

sauf sur un ensemble de mesure inférieure à $\frac{\delta}{2}\cdot$

La démonstration de 1° est simple. D'après l'hypothèse nous avons

$$\int_a^b (f_1 + f_2 + \cdots + f_{2^n})^2\,dx \leqslant 2^{(2+\alpha)n},$$

d'où

$$\int_a^b \frac{(f_1 + f_2 + \cdots + f_{2^n})^2}{2^{(2+\alpha)n}\,.\,n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}\,dx \leqslant \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \tag{6}$$

pour tout $n = 1, 2, \ldots.$ Considérons maintenant l'ensemble des points pour lesquels

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_{2^n})^2 \geqslant 2^{(2+\alpha)n}\,.\,n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

et désignons la mesure de cet ensemble par M_n.

En utilisant l'inégalité (6) nous obtenons que

$$M_n = \int_{M_n} dx \leqslant \int_{M_n} \frac{(f_1 + f_2 + \cdots + f_{2^n})^2}{2^{(2+\alpha)n}\,.\,n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}\,dx \leqslant \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}\cdot$$

Mais la série $\sum_1^\infty n^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$ converge, ainsi nous pouvons choisir un entier $n_0 = n_0(\delta, \varepsilon)$ de telle façon que $\sum_{n_0}^\infty M_n < \frac{\delta}{2}\cdot$ Il résulte donc immédiatement de la définition de l'ensemble que

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_{2^n})^2 < 2^{(2+\alpha)n}\,.\,n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

pour tout $n \geqslant n_0(\delta, \varepsilon)$ sauf sur un ensemble de mesure inférieure à $\frac{\delta}{2}\cdot$ Finalement $n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} = o(n^{1+\varepsilon})$, donc la proposition 1° est valable.

Nous allons examiner maintenant la proposition 2°. Tout d'abord nous allons montrer qu'il existe une limite supérieure de la somme $|f_{2^n+1}+f_{2^n+2}+\cdots+f_N|$, qui est suffisamment petite et indépendante de N. De cette façon nous pouvons parvenir à l'uniformité dans la relation 2°. Plus précisément nous montrerons que

$$(7) \qquad (f_{2^n+1}+f_{2^n+2}+\cdots+f_N)^2 < 4K(n, x)$$

pour tout $2^n < N < 2^{n+1}$, où

$$K(n, x)=\sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{n-\lambda}{2}} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1}\Big(\sum_{\nu=2^n+\mu_\lambda 2^\lambda+1}^{2^n+\mu_\lambda 2^\lambda+2^{\lambda-1}} f_\nu(x)\Big)^2$$

ne dépend que de n et des fonctions $f_\nu(x)$.

Pour simplifier l'écriture posons

$$f_{M+1}+f_{M+2}+\cdots+f_{M+N}=F(M, N) \qquad \text{et} \qquad F(M, O)=0.$$

Considérons maintenant le développement dyadique de l'entier N ; $2^n < N < 2^{n+1}$:

$$N=2^n+\varepsilon_{n-1}2^{n-1}+\cdots+\varepsilon_1 . 2+\varepsilon_0$$

où $\varepsilon_i=0, 1$ pour $i=0, 1, \ldots, (n-1)$. On voit immédiatement que

$$F(2^n, N)=F(2^n, \varepsilon_{n-1}2^{n-1})+F(2^n+\varepsilon_{n-1}2^{n-1}, \varepsilon_{n-2}2^{n-2}) + \cdots + F(2^n+\varepsilon_{n-1}2^{n-1}+\cdots+\varepsilon_1 . 2, \varepsilon_0).$$

Ainsi, si nous posons

$$(8) \qquad \mu_\lambda=\varepsilon_{n-1} . 2^{n-\lambda-1}+\varepsilon_{n-2}2^{n-\lambda-2}+\cdots+\varepsilon_\lambda$$

pour $\lambda=1, 2, \ldots, (n-1)$ et $\mu_n=0$, alors

$$f_{2^n+1}+f_{2^n+2}+\cdots+f_N=\sum_{\lambda=1}^{n} F(2^n+\mu_\lambda 2^\lambda, \varepsilon_{\lambda-1}2^{\lambda-1}).$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned}(f_{2^n+1}+f_{2^n+2}+\cdots+f_N)^2 &\\ &=\Big[\sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{\lambda-n}{4}}\Big(2^{\frac{n-\lambda}{4}} F(2^n+\mu_\lambda 2^\lambda, \varepsilon_{\lambda-1}2^{\lambda-1})\Big)\Big]^2 \\ &\leqslant \Big(\sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{\lambda-n}{2}}\Big)\Big(\sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{n-\lambda}{2}} F(2^n+\mu_\lambda 2^\lambda, \varepsilon_{\lambda-1}2^{\lambda-1})^2\Big).\end{aligned}$$

La première somme de cette inégalité est bornée, parce que

$$\sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{\lambda-n}{2}} < \sum_{\lambda=0}^{\infty} 2^{-\frac{\lambda}{2}}=2+\sqrt{2}<4.$$

D'autre part en observant que $F(M, O) = 0$ et $\varepsilon_{\lambda-1} = 0, 1$, on a

$$F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, \varepsilon_{\lambda-1} 2^{\lambda-1})^2 \leqslant F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})^2.$$

En combinant les trois dernières inégalités nous avons

$$(f_{2^n+1} + f_{2^n+2} + \cdots + f_N)^2 < 4\left(\sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{n-\lambda}{2}} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})^2\right).$$

Finalement en vertu de la définition des nombres μ_λ (cf. (8)), on voit que $0 \leqslant \mu_\lambda \leqslant 2^{n-\lambda} - 1$ pour $\lambda = 1, 2, \ldots, n$. Ainsi il vient que

$$(7^{bis}) \qquad (f_{2^n+1} + f_{2^n+2} + \cdots + f_N)^2 < 4K(n, x),$$

où

$$K(n, x) = \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{n-\lambda}{2}} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})^2.$$

Donc, l'inégalité annoncée est démontrée.

Pour obtenir la proposition 2° et pour compléter ainsi la démonstration du théorème auxiliaire, il suffit en vertu de (8) de prouver que

$$(9) \qquad K(n, x) = o(2^{(2+\alpha)n} . n^{1+\varepsilon})$$

est valable partout dans $a \leqslant x \leqslant b$ sauf sur un ensemble de mesure inférieure à $\frac{\delta}{2}$.

Or, considérons l'intégrale $\int_a^b K(n, x)\, dx$, où, comme nous savons, $K(n, x) \geqslant 0$. D'après l'hypothèse du théorème auxiliaire

$$\int_a^b F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})^2\, dx \leqslant 2^{2\lambda-2} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda + 2^{\lambda-1})^\alpha < 2^{2\lambda+(n+1)\alpha-2},$$

alors

$$\int_a^b K(n, x)\, dx < \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{n-\lambda}{2}} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{2\lambda+(n+1)\alpha-2}$$
$$< 2^{(2+\alpha)n+\alpha} \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{\frac{\lambda-n}{2}}$$

Ainsi nous obtenons que

$$\int_a^b \frac{K(n, x)}{2^{(2+\alpha)n} . n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}\, dx < \frac{2^\alpha}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} 2^{-\frac{\lambda}{2}} < \frac{c(\alpha)}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Avec cette inégalité la démonstration est achevée parce qu'un raisonnement pareil à celui de 1° prouve la proposition (9).

En effet, soit M_n la mesure de l'ensemble des points pour lesquels

$$K(n, x) \geqslant 2^{(2+\alpha)n} \cdot n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

D'après la dernière inégalité on a $M_n < c(\alpha) n^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$, donc

$$\sum_{n_0}^{\infty} M_n < c(\alpha) \sum_{n_0}^{\infty} n^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\delta}{2}$$

pourvu que $n_0 = n_0(\delta, \varepsilon)$ soit suffisamment grand. Alors pour $n \geqslant n_0$ on a

$$K(n, x) < 2^{(2+\alpha)n} \cdot n^{1+\frac{\varepsilon}{2}} = o(2^{(2+\alpha)n} \cdot n^{1+\varepsilon})$$

sauf sur un ensemble de mesure inférieure à $\frac{\delta}{2}$. Ainsi le théorème auxiliaire est complètement démontré.

Enfin nous voulons remarquer que le lecteur lui-même peut aisément énoncer des résultats analogues concernant les moyennes arithmétiques d'ordre supérieur. Cependant les résultats qu'on obtient ainsi ne sont pas plus forts que ceux auxquels on arrive en itérant (2).

Paris, Institut Henri Poincaré.

(Manuscrit reçu en novembre 1949.)

LA DUALITÉ DANS LES ESPACES ($\mathcal{F}$) ET ($\mathcal{LF}$)

par **Jean DIEUDONNÉ** et **Laurent SCHWARTZ** (Nancy).

---

1. **Introduction** [1]. — Etant donné un espace vectoriel topologique E on sait qu'on est amené à définir sur son *dual* E′ (espace des formes linéaires continues dans E) plusieurs topologies distinctes (en général), correspondant à la convergence uniforme des formes linéaires sur E dans des familles de parties de E plus ou moins vastes ; les deux plus importantes sont la topologie *faible* (topologie de la convergence simple) et la topologie *forte* (topologie de la convergence uniforme dans tout ensemble *borné* de E). Les propriétés de la topologie faible ont un caractère élémentaire et quasi algébrique [5] : mais en dehors du cas où E est un espace *normé* (cf. [2] et [5]), l'étude des relations entre la topologie forte et la topologie faible sur E′ est encore très peu développée. Nous nous proposons, dans ce travail, de faire cette étude pour les espaces ($\mathcal{F}$) et une catégorie d'espaces plus généraux, que nous appelons espaces ($\mathcal{LF}$), et qui peuvent être considérés comme « limites inductives » de suites d'espaces ($\mathcal{F}$), en un certain sens ; ces espaces jouent un grand rôle dans la théorie des *distributions*, développée récemment par l'un de nous [13], où la théorie de la dualité est un outil essentiel. Il est remarquable qu'un grand nombre de propriétés classiques de la théorie des espaces normés s'étendent aux espaces ($\mathcal{F}$) et aux espaces ($\mathcal{LF}$) bien que (notamment pour ces derniers) la méthode qui sert à démontrer ces propriétés pour les espaces normés se révèle inapplicable telle quelle (en particulier en raison du fait que le théorème de Baire ne s'applique plus dans ces espaces).

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

2. **Préliminaires.** — Nous suivons la terminologie et les notations générales des *Éléments* de N. Bourbaki ([3] et [4]). Pour la définition et les propriétés élémentaires des espaces localement convexes, nous renvoyons à [5](²). Ajoutons seulement quelques compléments relatifs à la notion d'ensemble *borné*, qui joue un rôle très important dans tout ce qui suit. Rappelons que, dans un espace vectoriel topologique E, un ensemble A est dit *borné* si pour tout voisinage U de O, il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que $A \subset \lambda U$. Tout homothétique d'un ensemble borné est borné; si B_1 et B_2 sont bornés, il en est de même de $B_1 \cup B_2$ et de $B_1 + B_2$; l'adhérence d'un ensemble borné est bornée; l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble borné A (plus petit ensemble convexe fermé contenant A) est bornée. L'image d'un ensemble borné par une application linéaire continue est bornée. Tout ensemble *précompact* est borné. Enfin, si (x_n) est une *suite de Cauchy* dans E, l'ensemble des x_n est *borné*; en effet, pour tout voisinage convexe symétrique V de O, il existe un entier m tel que $x_m - x_n \in V$ pour tout $n \geqslant m$; comme l'ensemble des x_p d'indice $p < m$ est fini, donc borné, il existe $\lambda > 0$ tel que cet ensemble soit contenu dans λV, donc l'ensemble des x_n est contenu dans $(\lambda + 1)V$.

Nous nous bornerons dans ce qui suit à considérer des espaces localement convexes sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, la théorie se déroulant de façon tout à fait analogue pour les espaces localement convexes sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Si E et F sont deux espaces localement convexes séparés, nous désignerons par $\mathfrak{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires *continues* de E dans F; c'est un espace vectoriel (sur $\mathbf{C}$). Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E; pour que la topologie de la *convergence uniforme dans les ensembles de* $\mathfrak{S}$ soit *compatible* avec la structure d'espace vectoriel de $\mathfrak{L}(E, F)$ (c'est-à-dire pour que $u + v$ et λu soient continues), on constate aisément qu'il faut et qu'il suffit que pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et tout $u \in \mathfrak{L}(E, F)$, $u(A)$ soit *borné* dans F. Cette condition est toujours remplie si les ensembles de la famille $\mathfrak{S}$ sont *bornés* dans E; nous supposerons toujours désormais qu'il en est ainsi. On peut toujours supposer en outre que toute partie d'un ensemble de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$, que toute réunion finie d'ensembles de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$, et enfin que tout homothétique d'un ensemble de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$; dans ces conditions, un système fondamental de voisinages de O dans

(²) Signalons que nous entendons par espace *localement convexe* un espace vectoriel topologique, *séparé ou non*, tel qu'il existe un système fondamental de voisinages de O formé d'ensembles convexes.

$\mathfrak{L}(E, F)$ pour la topologie considérée s'obtient en considérant, pour chaque $A \in \mathfrak{S}$ et chaque semi-norme q définissant la topologie de F, l'ensemble des $u \in \mathfrak{L}(E, F)$ tels que $q\big(u(x)\big) \leqslant 1$ pour tout $x \in A$. Cette topologie est localement convexe et définie par les semi-normes $\sup_{x \in A} q\big(u(x)\big)$; elle est séparée si tout point de E appartient à un ensemble de $\mathfrak{S}$ au moins ; nous supposerons aussi cette condition réalisée. Parmi toutes les topologies de cette nature sur $\mathfrak{L}(E, F)$, la *moins fine* est celle de la convergence *simple*, correspondant au cas où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties *finies* de E.

Le *dual* d'un espace localement convexe séparé E est l'espace $E' = \mathfrak{L}(E, C)$ des formes linéaires *continues* sur E ; c'est un sous-espace vectoriel du *dual algébrique* E^* de E (espace de *toutes* les formes linéaires sur E). Pour tout ensemble $A \subset E$, on appelle *ensemble polaire* de A dans E' l'ensemble A^0 des $x' \in E'$ tels que $|\langle x, x'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in A$; lorsque A parcourt un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E (ayant les propriétés indiquées ci-dessus), les ensembles A^0 forment un système fondamental de *voisinages de* O pour la topologie (sur E') de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$. En particulier, les ensembles polaires M^0 des parties finies de E forment un système fondamental de voisinages de O pour la topologie (sur E') de la convergence simple dans E, qu'on appelle *topologie faible* sur E', et qu'on note $\sigma(E', E)$. On notera que pour toute partie A de E, A^0 est un ensemble *convexe, cerclé* et *fermé* pour $\sigma(E', E)$; en outre, si (A_α) est une famille de parties de E, et si $\Gamma_\alpha A_\alpha$ désigne le *plus petit ensemble convexe et cerclé contenant tous les* A_α, on a $\left(\Gamma_\alpha A_\alpha\right)^0 = \bigcap_\alpha (A_\alpha^0)$. Lorsque V est un sous-espace vectoriel de E, V^0 n'est autre que le sous-espace de E' *orthogonal* à V, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues qui s'annulent dans V. On notera que si C est un ensemble convexe cerclé dans E, le plus petit ensemble convexe cerclé contenant V et C est leur somme $C + V$, donc $(C + V)^0 = C^0 \cap V^0$. Enfin, si U est un *voisinage de* O dans E, il résulte du th. de Tychonoff que U^0 est *compact* pour $\sigma(E', E)$.

Si on munit E' de la topologie faible $\sigma(E', E)$, toute forme linéaire continue sur E' s'écrit d'une seule manière $x' \to \langle x, x'\rangle$ pour un $x \in E$, et réciproquement ; autrement dit, E est le *dual* de E' (bien entendu, cela n'est plus nécessairement vrai lorsqu'on prend sur E' une topologie plus fine que $\sigma(E', E)\big)$. On peut donc définir sur E la

topologie faible $\sigma(E, E')$ et les ensembles polaires d'ensembles de E'. La topologie donnée $\mathfrak{T}$ sur E est plus fine que $\sigma(E, E')$, mais tout ensemble *convexe fermé* pour $\mathfrak{T}$ est *faiblement fermé*, et tout ensemble *faiblement borné* dans E est *borné* pour $\mathfrak{T}$ ([12], p. 524, th. 7). En outre :

PROPOSITION 1. — *Pour toute partie non vide* A *de* E, *l'ensemble bipolaire* $A^{00} = (A^0)^0$ *est identique au plus petit ensemble* B *convexe cerclé et fermé pour* $\sigma(E, E')$, *qui contient* A.

En effet, on a évidemment $B \subset A^{00}$; d'autre part, si $x_0 \notin B$, il existe, d'après le th. de Hahn-Banach, une forme linéaire réelle g sur E, continue pour $\sigma(E, E')$ et telle que $g(x_0) > 1$, et $g(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in B$. Comme B est cerclé, on a aussi $g(e^{i\theta}x) \leqslant 1$ pour tout $x \in B$ et tout nombre réel θ ; mais g est la partie réelle d'une forme linéaire continue $x' \in E'$ définie par $\langle x, x'\rangle = g(x) - ig(ix)$, donc $g(e^{i\theta}x)$ est la partie réelle de $\langle e^{i\theta}x, x'\rangle = e^{i\theta}\langle x, x'\rangle$; on a par suite $|\langle x, x'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in B$, ce qui montre que $x' \in A^0$, mais $|\langle x_0, x'\rangle| > 1$, donc $x_0 \notin A^{00}$, d'où $B = A^{00}$.

COROLLAIRE. — *Soit* (A_α) *une famille d'ensembles convexes, cerclés et fermés pour* $\sigma(E, E')$. *L'ensemble polaire* $\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)^0$ *est l'adhérence* (*pour* $\sigma(E', E)$) *de* $\Gamma_\alpha A_\alpha^0$.

En effet, on a $\left(\Gamma_\alpha A_\alpha^0\right)^0 = \bigcap_\alpha A_\alpha^{00} = \bigcap_\alpha A_\alpha$ en vertu de l'hypothèse, et le corollaire résulte de ce que $\Gamma_\alpha A_\alpha^0$ est convexe et cerclé, donc $\left(\Gamma_\alpha A_\alpha^0\right)^{00}$ est son adhérence.

Les résultats précédents peuvent être présentés de façon plus symétrique, en considérant deux espaces vectoriels (non topologiques) E, E' tels que chacun d'eux puisse être identifié à un sous-espace vectoriel du dual (algébrique) de l'autre (conditions (D_I) et (D_{II}) de [5]) ; on définit alors sur E et E' les topologies $\sigma(E, E')$ et $\sigma(E', E)$; pour ces topologies, chacun des espaces E, E' est dual de l'autre, et la prop. 1 et son corollaire sont encore valables. En outre, le th. suivant de Mackey ([12], p. 523, th. 4 et [11], p. 198, th. VII-4) caractérise toutes les topologies $\mathfrak{T}$ sur E pour lesquelles E' est le *dual* de E : une telle topologie est la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles d'une famille $\mathfrak{K}$ de parties *compactes* (pour $\sigma(E', E)$)

convexes et *cerclées* de E′, et dont la réunion est E′. Parmi ces topologies, il en est une *plus fine* que toutes les autres, correspondant au cas où $\mathfrak{K}$ est l'ensemble de *toutes* les parties faiblement compactes, convexes et cerclées de E′ ; nous la désignerons par $\tau(E, E')$: lorsqu'on considère E comme sous-espace de E'^* (autrement dit, comme constitué par des formes linéaires sur E′), on peut encore dire que $\tau(E, E')$ est la topologie de la *convergence uniforme dans les parties convexes et faiblement compactes de* E′. Les topologies $\mathfrak{T}$ considérées peuvent encore être définies comme étant *plus fines* que $\sigma(E, E')$ et *moins fines* que $\tau(E, E')$ [1].

3. **Espaces $(\mathcal{F})$ et espaces $(\mathcal{LF})$.** — Un espace $(\mathcal{F})$ peut être défini comme un espace *localement convexe, métrisable et complet* (3). La topologie d'un espace localement convexe *métrisable* peut être définie par une suite (p_n) de semi-normes, suite qu'on peut toujours supposer *croissante*. Si E est un espace $(\mathcal{F})$, V un sous-espace vectoriel fermé de E, V et E/V sont des espaces $(\mathcal{F})$. Tout produit d'une famille *dénombrable* d'espaces $(\mathcal{F})$ est un espace $(\mathcal{F})$. Le *complété* d'un espace *localement convexe et métrisable* est un espace $(\mathcal{F})$.

Citons quelques exemples importants d'espaces $(\mathcal{F})$ *non normables* :

1° L'espace $\mathfrak{D}_k$ des fonctions *indéfiniment dérivables* dans un intervalle compact K de la droite numérique R, la topologie étant définie par les semi-normes $p_n(x) = \sup\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ t \in K}} |x^{(k)}(t)|$.

2° L'espace des *fonctions entières*, la topologie étant celle de la *convergence compacte* ; cette topologie peut en effet être définie par les semi-normes $p_n(x) = \sup\limits_{|z| \leqslant n} |x(z)|$.

3° On montre facilement que l'exemple précédent est un cas particulier d'une classe d'espaces $(\mathcal{F})$ étudiée récemment par M. Köthe sous le nom de « gestufte Raüme » ([8], [10]). Considérons une suite double (b_{mn}) de nombres positifs telle que : *a*) pour chaque *m*, la suite (b_{mn}) soit croissante et tende vers $+\infty$; *b*) pour chaque *m*, on ait $\lim. \sup\limits_{n \to \infty} b_{m+1,n}/b_{mn} = +\infty$. On définit alors l'espace E

(3) Nous nous écartons un peu ici de la terminologie de Banach [2] et de l'école polonaise, qui appellent plus généralement « espace $(\mathcal{F})$ » un espace vectoriel topologique métrisable et complet, mais *non nécessairement localement convexe* ; ils appellent « espace (B_0) » ce que nous appelons « espaces $(\mathcal{F})$ ». Les « espaces $(\mathcal{F})$ » au sens de Banach, qui ne sont pas localement convexes, présentent d'ailleurs des caractères pathologiques qui les rendent à peu près inutilisables en Analyse fonctionnelle.

comme l'espace des suites $u = (u_n)$ de nombres complexes telles que $\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} |u_n| < +\infty$ pour tout m, et on le munit de la topologie définie par les semi-normes $p_m(u) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} |u_n|$; il est facile de voir que c'est un espace $(\mathcal{F})$ non normable. L'exemple précédent correspond au cas où $b_{mn} = m^n$. On obtiendrait d'autres espaces $(\mathcal{F})$ en remplaçant dans la définition précédente la condition $\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} |u_n| < +\infty$ par $\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} |u_n|^p < +\infty$, et en prenant pour semi-normes $q_m(u) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} |u_n|^p\right)^{1/p}$ (p nombre > 1).

4° Soit G un espace *localement compact dénombrable à l'infini*, c'est-à-dire réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles compacts G_n, qu'on peut supposer former une suite croissante telle que $\overline{G}_n$ soit contenu dans l'intérieur de G_{n+1} ; toute partie compacte de G est alors contenue dans un G_n. Soit E l'espace des fonctions complexes continues dans G ; muni de la topologie de la *convergence uniforme dans les parties compactes de* G, c'est un espace $(\mathcal{F})$, dont la topologie peut être définie par les semi-normes $p_n(x) = \sup_{t \in G_n} |x(t)|$.

A partir des espaces $(\mathcal{F})$, nous allons maintenant définir les espaces $(\mathcal{LF})$ qui s'en déduisent par un processus qu'on peut considérer comme une « limite inductive ». Soit E un espace vectoriel et $(E_n)_{n \geqslant 1}$ une suite infinie *strictement croissante* de sous-espaces vectoriels de E, telle que E soit *réunion* des E_n. Supposons chacun des E_n muni d'une topologie $\mathcal{T}_n$, pour laquelle E_n est un *espace* $(\mathcal{F})$; enfin nous supposerons ces topologies *compatibles* au sens suivant : *la topologie induite sur* E_n *par* $\mathcal{T}_{n+1}$ *est identique à* $\mathcal{T}_n$. Il en résulte que E_n est un sous-espace *fermé* de E_{n+1}, puisqu'il est complet pour $\mathcal{T}_n$ par hypothèse.

Considérons alors toutes les topologies $\mathcal{T}$ d'espace localement convexe sur E, qui induisent sur chacun des E_n une topologie *moins fine que* $\mathcal{T}_n$; nous allons voir que parmi ces topologies, il en existe une $\mathcal{T}_\omega$ *plus fine que toutes les autres*. En effet, une topologie $\mathcal{T}$ doit être telle que, pour tout voisinage convexe cerclé V de O (pour $\mathcal{T}$), $V \cap E_n$ soit un voisinage de O pour la topologie $\mathcal{T}_n$. Soit $\mathfrak{W}$ l'ensemble de *tous* les ensembles convexes cerclés V dans E, qui ont cette propriété ; il est clair que le sous-espace vectoriel de E engendré

par un tel ensemble V contient tous les sous-espaces E_n, et par suite est identique à E. Il en résulte que $\mathfrak{W}$ est un système fondamental de voisinages de O pour une topologie $\mathcal{T}_\omega$ d'espace localement convexe sur E, qui est évidemment la plus fine de toutes les topologies $\mathcal{T}$. Un espace localement convexe E défini de la sorte sera appelé un *espace* $(\mathcal{LF})$, et nous dirons que (E_n) est une *suite de définition* de cet espace.

Exemples. — 1° Soit G un espace *localement compact dénombrable à l'infini*, réunion d'ensembles compacts G_n, qu'on peut supposer former une suite croissante, telle que $\overline{G}_n$ soit contenu dans l'intérieur de G_{n+1}. Soit E l'espace des fonctions complexes continues dans G et *à support compact* (c'est-à-dire telles qu'il existe un ensemble compact — dépendant de la fonction considérée — en dehors duquel la fonction est nulle) ; et soit E_n le sous-espace de E formé des fonctions nulles dans le complémentaire de G_n. Si on prend pour $\mathcal{T}_n$ la topologie de la convergence uniforme dans G_n, on voit sans peine que les sous-espaces E_n sont des espaces de Banach dont les topologies sont compatibles ; ils définissent donc sur E une topologie d'espace $(\mathcal{LF})$.

2° Soit $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions *indéfiniment dérivables* dans R et *à support compact* ; soit $\mathcal{D}_n$ le sous-espace de $\mathcal{D}$ formé des fonctions nulles pour $|x| \geqslant n$. Si on prend pour $\mathcal{T}_n$ la topologie définie sur $\mathcal{D}_n$ par les semi-normes $p_m(u) = \sup\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant m \\ t \in R}} |u^{(k)}(t)|$, on vérifie aisément que $\mathcal{D}_n$ est un espace $(\mathcal{F})$ non normable, et que les topologies $\mathcal{T}_n$ sont compatibles.

3° Soit (F_n) une suite quelconque d'espaces $(\mathcal{F})$, et soit F l'espace produit (sans topologie) des espaces vectoriels F_n. Soit E le sous-espace de F *somme directe* des F_n, c'est-à-dire formé des points (x_n), où $x_n = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices ; E est réunion des sous-espaces E_n, où E_n est formé des points (x_m) tels que $x_m = 0$ pour $m > n$. Si on prend pour $\mathcal{T}_n$ la topologie *produit* des topologies des F_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$, E_n est un espace $(\mathcal{F})$, et on constate aussitôt que les topologies $\mathcal{T}_n$ sont compatibles. Quand nous parlerons de l'espace *somme directe* d'une suite (F_n) d'espaces $(\mathcal{F})$ il sera toujours sous-entendu qu'il s'agit de l'espace $(\mathcal{LF})$ ainsi défini.

Soit E un espace $(\mathcal{LF})$ défini par une suite (E_n) de sous-espaces munis de topologies $\mathcal{T}_n$ d'espaces $(\mathcal{F})$ compatibles. Soit (F_n) une deuxième suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels

de E, ayant pour réunion E, et muni chacun d'une topologie $\mathcal{T}'_n$, pour laquelle F_n est un espace $(\mathcal{F})$, ces topologies étant supposées compatibles. Nous dirons que la suite (F_n) est *équivalente* à la suite (E_n) si, pour tout entier n, il existe d'une part un entier p tel que $F_n \subset E_p$ et que $\mathcal{T}'_n$ soit la topologie induite sur F_n par $\mathcal{T}_p$, et d'autre part un indice q tel que $E_n \subset F_q$ et que $\mathcal{T}_n$ soit la topologie induite sur E_n par $\mathcal{T}'_q$. Dans ces conditions, nous allons voir que la topologie $\mathcal{T}'_\omega$ définie sur E par la suite (F_n) est *identique à* $\mathcal{T}_\omega$; en effet, pour tout voisinage V de O dans la topologie $\mathcal{T}_\omega$, $V \cap F_n = (V \cap E_p) \cap F_n$ est un voisinage de O pour la topologie $\mathcal{T}'_n$; donc V est par définition un voisinage de O pour la topologie $\mathcal{T}'_\omega$, ce qui prouve que $\mathcal{T}_\omega$ est moins fine que $\mathcal{T}'_\omega$; on montre de même que $\mathcal{T}'_\omega$ est moins fine que $\mathcal{T}_\omega$, et par suite les deux topologies sont bien identiques. En particulier, si (n_k) est une suite strictement croissante d'entiers, la suite (E_{n_k}) extraite de la suite (E_n) est équivalente à (E_n).

Proposition 2. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{LF})$, (E_n) *une suite de définition de* E ; *l'espace* E *est séparé, et la topologie induite sur* E_n *par* $\mathcal{T}_\omega$ *est identique à* $\mathcal{T}_n$.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme. — *Soient* F *un espace localement convexe séparé,* G *un sous-espace vectoriel fermé de* F, V *un ensemble ouvert convexe dans* G, x *un point de* F *n'appartenant pas à* V. *Il existe un ensemble ouvert convexe* U *dans* F, *tel que* $U \cap G = V$ *et que* $x \notin U$.

On peut supposer pour simplifier que l'origine O appartient à V. Le complémentaire de V dans G est fermé dans G, donc dans F ; il existe donc un voisinage ouvert convexe W de O dans F, tel que $W \cap G \subset V$; montrons que si W est assez petit, *l'enveloppe convexe* U de V et de W répond à la question. En effet, U est l'ensemble des points $\lambda y + (1 - \lambda)z$, où $y \in V$, $z \in W$ et $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; si $z \notin G$, le seul point du segment joignant y à z qui soit dans G est le point y ; au contraire, si $z \in G$, on a $z \in G \cap W \subset V$, donc tous les points de ce segment sont dans V, ce qui prouve bien que $U \cap G = V$. Pour tout $y \in V$, soit S_y l'enveloppe convexe de y et de W. L'ensemble S_y est réunion du point y et de tous les homothétiques de W par rapport à y, avec un rapport d'homothétie μ tel que $0 < \mu \leqslant 1$; le complémentaire de y dans S_y est donc *ouvert* dans F. Or, U est réunion des S_y lorsque y parcourt V ; tout point de U n'appartenant pas à V est donc intérieur à U. D'autre part, si $y \in V$, il existe $\lambda > 1$ tel que $u = \lambda y \in V$, par suite y appartient à S_u et est distinct de u, ce qui

montre encore que y est intérieur à U, et par suite que U est *ouvert* dans F. Enfin, si $x \in G$ n'appartient pas à V, on a $x \notin U$; d'autre part, si $x \notin G$, il existe W assez petit pour que $x \notin W + G$, puisque l'espace quotient F/G est séparé ; a fortiori, on a $x \notin U$, ce qui achève la démonstration du lemme.

On notera que si V est cerclé dans G, on peut supposer U cerclé dans F ; il suffit en effet de remplacer l'ensemble U construit ci-dessus par l'intersection de tous les ensembles $e^{i\theta}U$.

Cela étant, pour démontrer la prop. 2, il suffit de prouver que pour tout voisinage ouvert convexe et cerclé V_n de O dans E_n, il existe un voisinage ouvert convexe et cerclé V de O dans E tel que $V \cap E_n = V_n$. D'après le lemme, on peut définir par récurrence sur p un voisinage ouvert convexe cerclé V_{n+p} de O dans E_{n+p} de sorte que $V_{n+p+1} \cap E_{n+p} = V_{n+p}$ pour tout $p \geqslant 0$; la réunion V des V_{n+p} (pour $p \geqslant 0$) répond à la question.

Corollaire. — *Les sous-espaces* E_n *sont fermés dans* E.

En effet, comme ils sont *complets* pour la topologie induite sur eux par la topologie de E, ils sont fermés dans E.

4. Ensembles bornés dans les espaces $(\mathcal{F})$ et les espaces $(\mathcal{LF})$.

Montrons en premier lieu qu'un espace $(\mathcal{F})$ satisfait à la *première condition de dénombrabilité de Mackey* ([11], p. 182), autrement dit :

Proposition 3. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$, (A_n) *une suite d'ensembles bornés dans* E. *Il existe une suite* (λ_n) *de nombres* > 0 *telle que la réunion des ensembles* $\lambda_n A_n$ *soit bornée.*

La proposition est un cas particulier d'un théorème de Mackey ([11], p. 187, th. V-11) ; la démonstration en est immédiate : si (p_n) est une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de E, et si $\alpha_{mn} = \sup_{x \in A_m} p_n(x)$, il suffit de prendre $\lambda_n = 1/\alpha_{nn}$ pour répondre à la question.

Par contre, la *seconde condition de dénombrabilité de Mackey* ([11], p. 182) n'est vérifiée par un espace $(\mathcal{F})$ que si cet espace est *normable* (donc un espace de Banach). En effet, elle signifie qu'il existe une suite (B_n) d'ensembles bornés dans l'espace E considéré, telle que tout ensemble borné dans E soit contenu dans un B_n ; or, cette condition entraîne en particulier que E est réunion de $\overline{B}_n$, donc, en vertu du th. de Baire, un des ensembles $\overline{B}_n$ au moins contient

un point intérieur, ce qui signifie qu'il existe dans E un voisinage de O borné, donc [9] que E est normable (cf. [11], p. 192).

Proposition 4. — *Soit* E *un espace* ($\mathfrak{L}\mathfrak{F}$), (E_n) *une suite de définition de* E. *Pour qu'un ensemble* $A \subset E$ *soit borné, il faut et il suffit qu'il existe un entier* n *tel que* $A \subset E_n$ *et que* A *soit borné dans* E_n.

La condition est évidemment suffisante ; pour voir qu'elle est nécessaire, il suffit de prouver que si un ensemble N n'est contenu dans aucun des E_n, il ne peut être borné. Il existe alors une suite croissante d'entiers n_k et une suite de points x_{n_k} de N telle que $x_{n_k} \notin E_{n_k}$ et $x_{n_k} \in E_{n_{k+1}}$; on peut évidemment se borner au cas où $n_k = k$. En vertu du lemme, on peut définir une suite (V_k) tel que V_k soit un voisinage convexe et cerclé de O dans E_k que l'on ait $V_{k+1} \cap E_k = V_k$, et que $\frac{1}{k} x_k \notin V_{k+1}$. La réunion V des V_k est alors un voisinage de O dans E, tel que $\frac{1}{k} x_k \notin V$ quel que soit k ; il en résulte que $N \not\subset k . V$ quel que soit l'entier k, ce qui prouve que N n'est pas borné.

Corollaire 1. — *Dans un espace* ($\mathfrak{L}\mathfrak{F}$), *toute suite de Cauchy est convergente.*

En effet, si (x_n) est une suite de Cauchy dans un espace ($\mathfrak{L}\mathfrak{F}$) E, on a vu (n° 2) que l'ensemble des x_n est borné ; il existe donc un entier q tel que $x_n \in E_q$ pour tout n ; la suite (x_n) étant une suite de Cauchy dans l'espace complet E_q, est convergente.

On notera que si Φ est un *filtre de Cauchy* sur E, ayant une base *dénombrable* (A_n) (qu'on peut supposer décroissante), il existe un des A_n contenu dans un espace E_q, et que par suite Φ *converge*. En effet, dans le cas contraire, il existerait pour tout n, un $x_n \in A_n$ tel que $x_n \notin E_n$; la suite (x_n) serait une suite de Cauchy, contrairement à ce qui précède.

Nous démontrerons plus loin (cor. du th. 6) un résultat plus précis, savoir qu'un *filtre de Cauchy* quelconque sur un espace ($\mathfrak{L}\mathfrak{F}$) est convergent, autrement dit qu'un tel espace est *complet*. Du corollaire précédent, on déduit déjà que :

Corollaire 2. — *Un espace* ($\mathfrak{L}\mathfrak{F}$) *n'est pas métrisable.*

En effet, si un espace ($\mathfrak{L}\mathfrak{F}$) était métrisable, il serait complet d'après le cor. 1 ; or une suite de définition (E_n) d'un tel espace est formée de sous-espaces vectoriels fermés (cor. de la prop. 2) donc *rares* dans E, et d'après le th. de Baire, un espace métrique complet ne peut être réunion dénombrable d'ensembles rares.

La *première condition de dénombrabilité* de Mackey n'est *jamais* vérifiée dans un espace $(\mathcal{LF})$: en effet, si $x_n \notin E_n$ et $x_n \in E_{n+1}$ la suite $(\lambda_n x_n)$ n'est bornée pour *aucun* choix des $\lambda_n > 0$, en vertu de la prop. 4, puisqu'elle ne peut appartenir à aucun des E_q.

En ce qui concerne la *seconde condition de dénombrabilité* de Mackey, si E est un espace $(\mathcal{LF})$ dans lequel elle est vérifiée, et (E_n) une suite de définition de E, il est clair que la même condition de dénombrabilité doit être vérifiée dans chacun des E_n ; mais nous avons vu ci-dessus que cela entraîne que les E_n sont des *espaces de Banach*. Inversement, s'il existe une suite de définition (E_n) de E formée d'espaces de Banach, E satisfait à la seconde condition de dénombrabilité de Mackey : on peut en effet définir une suite croissante d'ensembles bornés $A_n \subset E_n$ telle que A_n contienne la boule de rayon n et de centre l'origine dans chacun des E_k d'indice $k \leqslant n$. Il est clair en vertu de la prop. 4, que tout ensemble borné dans E est contenu dans un ensemble A_n.

5. Fonctions linéaires continues dans les espaces $(\mathcal{F})$ et les espaces $(\mathcal{LF})$.

PROPOSITION 5. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{LF})$, (E_n) *une suite de définition de* E. *Pour qu'une application linéaire u de* E *dans un espace localement convexe* F *soit continue, il faut et il suffit que sa restriction à chacun des* E_n *soit continue.*

En effet, si cette condition est vérifiée, et si U est un voisinage convexe de O dans F, $\overset{-1}{u}(U) \cap E_n$ est un voisinage convexe de O pour tout n, donc $\overset{-1}{u}(U)$ est un voisinage de O dans E d'après la définition de la topologie de E ; d'où la proposition.

PROPOSITION 6. — *Soient* E *un espace localement convexe métrisable ou un espace* $(\mathcal{LF})$, F *un espace localement convexe. Pour qu'une application linéaire u de* E *dans* F *soit continue, il faut et il suffit que pour tout ensemble* A *borné dans* E, $u(A)$ *soit borné dans* F.

En vertu des prop. 4 et 5, tout revient à démontrer le théorème lorsque E est un *espace localement convexe métrisable* ; il résulte dans ce cas de théorèmes de Mackey ([12], p. 527, th. 8 et 10) ; pour être complet, donnons rapidement la démonstration. Soit (p_n) une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de E. Si u n'était pas continue, il existerait une semi-norme q continue dans F, et une suite (x_n) de points de E telle que $p_n(x_n) \leqslant 1$

et $q(u(x_n)) \geqslant n$. Comme la suite (p_n) est croissante, on a $\sup_n p_k(x_n) \leqslant \sup\left(1, \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} p_k(x_i)\right) < +\infty$, autrement dit la suite (x_n) serait bornée, mais non la suite $(u(x_n))$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous allons maintenant généraliser aux espaces $(\mathcal{LF})$ un théorème bien connu de Banach sur les espaces $(\mathcal{F})$ ([2], p. 40, th. 4) :

Théorème 1. — *Soient* E *et* F *deux espaces* $(\mathcal{LF})$. *Toute application linéaire continue u de* E *sur* F *est un homomorphisme.*

Soit (E_n) une suite de définition de E, (F_n) une suite de définition de F. Pour tout couple d'indices m, n, nous poserons $G_{mn} = E_m \cap \overset{-1}{u}(F_n)$; c'est un sous-espace vectoriel fermé de E_m.

Donnons à n une valeur fixe ; comme $u(G_{mn}) = u(E_m) \cap F_n$, et que $u(E) = F$, F_n est la réunion des $u(G_{mn})$ (m variable) ; comme F_n est un espace $(\mathcal{F})$, il résulte du th. de Baire qu'un au moins des sous-espaces $u(G_{mn})$ est *non maigre* dans F_n ; mais alors, un th. de Banach ([2], p. 38, th. 3) montre que pour cet indice m, on a nécessairement $u(G_{mn}) = F_n$. En outre, u est un homomorphisme de G_{mn} sur F_n ([2], p. 40, th. 4). Soit alors V un voisinage de O quelconque dans E ; comme $V \cap G_{mn}$ est un voisinage de O dans G_{mn} (prop. 2), $u(V \cap G_{mn})$ est un voisinage de O dans F_n, et a fortiori il en est de même de $u(V) \cap F_n$; mais par définition, cela prouve que $u(V)$ est un voisinage de O dans F, d'où le théorème.

6. **Espaces de fonctions linéaires continues dans un espace $(\mathcal{F})$ ou un espace $(\mathcal{LF})$.** — Étant donné deux espaces localement convexes séparés E, F, nous considérerons, sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F, les trois topologies suivantes : la topologie $\mathcal{T}_s$ de la convergence *simple*, la topologie $\mathcal{T}_c$ de la convergence uniforme dans les parties *compactes* de E, et la topologie $\mathcal{T}_b$ de la convergence uniforme dans les parties *bornées* de E (cf. n° 2).

On notera qu'un ensemble H *borné pour la topologie* $\mathcal{T}_b$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ peut être caractérisé de la façon suivante : pour tout ensemble borné $B \subset E$, la réunion des ensembles $u(B)$, où u parcourt H, est *bornée* dans F. En effet, cette condition signifie que pour tout voisinage V de O dans F, il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que $u(B) \subset \lambda V$ pour tout $u \in H$; mais si T est le voisinage de O

(dans la topologie $\mathcal{T}_b$) formée des u tels que $u(\mathrm{B}) \subset \mathrm{V}$, la relation précédente équivaut à $\mathrm{H} \subset \lambda \mathrm{T}$, ce qui établit notre assertion.

Proposition 7. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, F *un espace localement convexe séparé quelconque. Si* F *est complet, l'espace* $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est complet pour la topologie* $\mathcal{T}_b$.

En effet, soit Φ un filtre de Cauchy sur $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ pour la topologie $\mathcal{T}_b$, et soit A une partie bornée quelconque de E ; pour toute semi-norme continue q sur F et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $\mathrm{M} \in \Phi$ tel que $q\big(u(x) - v(x)\big) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in \mathrm{A}$ et tout couple d'éléments u, v de M. Comme F est complet, le filtre Φ converge simplement vers une application linéaire u_0 de E dans F, et on a $q\big(u_0(x) - u(x)\big) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in \mathrm{A}$ et tout $u \in \mathrm{M}$. Or, comme u est continue, $u(\mathrm{A})$ est borné dans F, donc $q\big(u(x)\big) \leqslant k$ pour tout $x \in \mathrm{A}$; par suite $q\big(u_0(x)\big) \leqslant k + \varepsilon$ pour tout $x \in \mathrm{A}$; ceci démontre que $u_0(\mathrm{A})$ est *borné* dans F, et par suite (prop. 6) que u_0 est *continue* dans E, autrement dit appartient à $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$; il est clair alors que u_0 est limite du filtre Φ pour la topologie $\mathcal{T}_b$.

Théorème 2. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, F *un espace localement convexe séparé quelconque*, H *une partie de* $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) H *est équicontinu dans* E ;

b) H *est borné pour la topologie* $\mathcal{T}_b$;

c) H *est borné pour la topologie* $\mathcal{T}_s$.

En outre, lorsque ces conditions sont vérifiées, les topologies induites sur H *par* $\mathcal{T}_s$ *et* $\mathcal{T}_c$ *sont identiques, et elles sont identiques à la topologie de la convergence simple dans une partie partout dense de* E.

En premier lieu, montrons que a) entraîne b) et b) entraîne c) lorsque E est un espace localement convexe *quelconque*. La seconde proposition est immédiate ; quant à la première, si H est équicontinu, pour toute semi-norme q continue dans F, il existe un voisinage V de O dans E et un nombre $a > 0$ tels que $q\big(u(x)\big) \leqslant a$ quels que soient $x \in \mathrm{V}$ et $u \in \mathrm{H}$. Si A est un ensemble borné quelconque dans E, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda \mathrm{A} \subset \mathrm{V}$, donc $q\big(u(x)\big) \leqslant \frac{1}{\lambda} a$ pour tout $x \in \mathrm{A}$, ce qui démontre que H est borné pour la topologie $\mathcal{T}_b$.

Reste à montrer que c) entraîne a) lorsque E est un espace $(\mathcal{F})$ ou un espace $(\mathcal{LF})$. Considérons d'abord le cas où E est un espace

$(\mathcal{F})$. Par hypothèse, pour toute semi-norme q continue dans F, la fonction $f(x) = \sup_{u \in H} q(u(x))$ est *finie* dans E ; comme $q(u(x))$ est continue dans E, f est *semi-continue inférieurement* ; il résulte du th. de Baire qu'il existe un point $x_0 \in E$ et un voisinage V de O dans E tels que $f(x)$ soit bornée supérieurement dans $x_0 + V$; comme f est enveloppe supérieure de fonctions convexes, c'est une fonction convexe, donc, pour $y \in V$, on a $f(y) \leqslant f(x_0) + f(x_0 + y)$, ce qui prouve que f est bornée supérieurement dans V, donc que H est équicontinue au point O, et par suite dans E.

Si E est un espace $(\mathcal{LF})$, définissons encore la fonction f comme ci-dessus, et soit W l'ensemble des points de E où $f(x) \leqslant 1$. Si (E_n) est une suite de définition de E, il résulte de ce qui précède que $W \cap E_n$ est un voisinage convexe de O dans E_n ; donc W est par définition un voisinage de O dans E, ce qui montre encore que dans ce cas c) entraîne a).

La dernière partie du théorème est simplement l'énoncé de propriétés classiques des ensembles équicontinus ([4], chap. x, p. 34, prop. 14 et p. 29, prop. 3).

La notion d'ensemble *borné* dans l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est donc la même pour les trois topologies $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_c$ et $\mathcal{T}_b$, et on peut donc parler d'ensemble borné dans cet espace sans spécifier pour laquelle de ces trois topologies.

On dira qu'un filtre sur $\mathcal{L}(E, F)$ est *borné* s'il existe un ensemble borné appartenant à ce filtre.

Corollaire. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, F *un espace localement convexe séparé. Soit* Φ *un filtre borné sur* $\mathcal{L}(E, F)$. *Si* Φ *converge simplement dans* E *vers une fonction* u_0, u_0 *est une application linéaire continue de* E *dans* F, *et* Φ *converge uniformément vers* u_0 *dans toute partie compacte de* E. *En outre, si* F *est complet, pour que* Φ *converge simplement dans* E, *il suffit que* Φ *converge simplement dans une partie partout dense de* E.

La première partie est un cas particulier d'une propriété générale des ensembles équicontinus ([4], chap. x, p. 30, prop. 7) ; d'autre part, l'hypothèse de la seconde partie du corollaire entraîne que $\Phi(x)$ est un filtre de Cauchy dans F, donc un filtre convergent, pour tout $x \in E$ ([4], chap. x, p. 29, prop. 3).

Le corollaire précédent s'appliquera surtout au cas d'une *suite* (u_n) d'applications linéaires continues de E dans F ; car si une telle suite

converge simplement dans E, elle est évidemment bornée pour la topologie $\mathcal{T}_s$.

7. **Dual fort d'un espace $(\mathcal{F})$ ou d'un espace $(\mathcal{LF})$.** — Étant donné un espace localement convexe séparé E et son dual E′, la topologie *forte* sur E′ sera par définition la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles *bornés* de E : un système fondamental de voisinages de O pour cette topologie est donc formé par les ensembles *polaires* B^0 des ensembles *bornés* B de E.

Exemples. — 1° Soit (E_n) une suite d'espaces de Banach ; on vérifie facilement que le dual fort du *produit* des espaces E_n est la *somme directe* des duals forts E'_n, et que le dual fort de la *somme directe* des E_n est le *produit* des E'_n.

2° Le dual E′ d'un « gestufter Raum » E (n° 3) défini par une suite double (b_{mn}) est, comme on le voit sans peine, l'ensemble des suites $v = (v_n)$ de nombres complexes telles que, pour *un* indice m au moins, il existe $M > 0$ tel que $|v_n| \leqslant M b_{mn}$ pour tout n ; un tel espace est appelé par M. Köthe le « Stufenraum » défini par la suite double (b_{mn}) [10].

3° Le dual de l'espace $(\mathcal{LF})$ des fonctions continues à support compact définies dans un espace localement compact G dénombrable à l'infini n'est autre que l'espace des *mesures de Radon* sur G ; le dual de l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions indéfiniment dérivables dans R et à support compact est l'espace $\mathcal{D}'$ des *distributions* sur R [13].

Lorsque E est un espace $(\mathcal{F})$ ou un espace $(\mathcal{LF})$, le dual fort E′ de E est *complet*, en vertu de la prop. 7. Si E est un espace $(\mathcal{F})$, le dual fort E′ ne peut être *métrisable* que si E est un *espace de Banach* (auquel cas on sait qu'il en est de même de E′) ; en effet, s'il existe un système fondamental dénombrable de voisinage V_n de O dans E′, les ensembles polaires V_n^0 dans E sont des ensembles bornés tels que tout ensemble borné dans E soit contenu dans un V_n^0 ; en d'autres termes, E satisfait à la seconde condition de dénombrabilité de Mackey, et nous avons vu (n° 4) que cela n'est possible que lorsque E est normable.

Le même raisonnement montre que, lorsque E est un espace $(\mathcal{LF})$, le dual fort E′ ne peut être *métrisable* que lorsqu'il existe une suite de définition (E_n) de E formée d'*espaces de Banach* (cf. n° 4) ; dans ce cas le dual fort E′ est un *espace* $(\mathcal{F})$.

Pour tout $x \in E$ et tout $x' \in E'$, rappelons que $\langle x, x' \rangle = x'(x)$.

Chacune des applications partielles $x \to \langle x, x' \rangle$, $x' \to \langle x, x' \rangle$ est continue dans E et E′ respectivement ; mais l'application bilinéaire $(x, x') \to \langle x, x' \rangle$ de $E \times E'$ dans C n'est continue (E′ étant muni de la topologie *forte*) que lorsque E est *normable*. En effet, si cette application est continue, il existe un voisinage V de O dans E et un ensemble borné B dans E tels que les relations $x \in V$, $x' \in B^0$, entraînent $|\langle x, x' \rangle| \leq 1$: autrement dit, on a $V \subset B^{00}$, et comme B^{00} est borné (prop. 1), V est borné, donc [9], E est normable. Nous étudierons au n° 14 la propriété qui se substitue à la continuité de $\langle x, x' \rangle$ dans $E \times E'$ lorsque E n'est pas normable.

THÉORÈME 3. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, H *une partie du dual* E′ *de* E. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) *il existe un voisinage* U *de* O *dans* E *tel que* $H \subset U^0$;

b) H *est fortement borné ;*

c) H *est faiblement borné ;*

d) H *est faiblement relativement compact* [4].

En effet, la proposition a) signifie que H est équicontinu dans E ; elle entraîne donc b), c) et d) pour un espace localement convexe E quelconque. D'après le th. 2, a), b) et c) sont équivalentes lorsque E est un espace $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{LF})$; enfin, il est clair que d) entraîne c) pour un espace localement convexe E quelconque, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. — *Si* E *est un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, *la topologie de* E *est identique à la topologie* $\tau(E, E')$.

Ce résultat, qui est dû à Mackey pour les espaces $(\mathcal{F})$ ([12], p. 527, th. 10) provient du fait que si U est un voisinage convexe cerclé et fermé de O dans E, on a $U^{00} = U$ (prop. 1), et que toute partie faiblement compacte de E′ est contenue dans un ensemble U^0 d'après le th. 3.

Il ne sera peut-être pas inutile de résumer, pour la suite de ce travail, les relations entre voisinages et ensembles bornés dans un espace localement convexe séparé E et dans son dual *fort* E′ :

1° si U est un *voisinage* de O dans E, U^0 est *borné* et *faiblement compact* dans E′ ;

2° si B est un ensemble *borné* dans E, B^0 est un *voisinage de* O dans E′ ;

[4] Pour les espaces $(\mathcal{F})$, le th. 3 a été essentiellement démontré par Sirvint (cf. [12], p. 534, th. 19).

3° si V est un *voisinage* de O dans E′, V^0 est un ensemble *borné* dans E;

4° lorsque E est un espace $(\mathcal{F})$ ou un espace $(\mathcal{LF})$, si C est un ensemble *borné* dans E′, C^0 est un *voisinage de* O dans E.

Le dual fort E′ d'un espace $(\mathcal{F})$ E satisfait à la *seconde condition de dénombrabilité de Mackey* ([11], p. 182); autrement dit :

Proposition 8. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$. *Il existe dans le dual* E′ *une suite* (C_n) *d'ensembles bornés telle que tout ensemble borné dans* E′ *soit contenu dans un des* C_n.

En effet, soit (U_n) un système fondamental dénombrable de voisinages de O dans E; pour tout voisinage U de O dans E, il existe un indice n tel que $U_n \subset U$, d'où $U^0 \subset U_n^0$; d'après le th. 3, les ensembles $C_n = U_n^0$ répondent à la question.

On voit d'ailleurs de la même façon qu'inversement, si E est un espace localement convexe séparé qui vérifie la *seconde condition de dénombrabilité* de Mackey, son dual fort E′ est *métrisable*.

Corollaire. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$; *tout filtre* Φ *sur* E′ *qui admet une base dénombrable et est un filtre de Cauchy pour la topologie faible, est un filtre borné.*

En effet, soit (A_n) une base décroissante de Φ. Si aucun des A_n n'était borné, il existerait, pour tout n, un $x'_n \in A_n$ tel que $x'_n \notin C_n$; d'après la prop. 8, l'ensemble des x'_n n'est donc pas borné; mais le choix des x'_n montre que la suite (x'_n) est une suite de Cauchy pour la topologie faible, qui est bornée dans E′ (n° 2); nous aboutissons ainsi à une contradiction.

On notera que, *sur un espace* $(\mathcal{F})$, un filtre faiblement convergent et ayant une base dénombrable n'est pas nécessairement borné, comme le montre l'exemple du filtre des voisinages de O.

8. **Bidual. Espaces réflexifs et semi-réflexifs.** — Étant donné un espace localement convexe séparé E, le *bidual* (fort) E″ de E est le *dual fort* du dual *fort* E′ de E. Pour tout $x \in E$, la forme linéaire $x' \to \langle x, x' \rangle$ sur E′ est continue pour la topologie faible $\sigma(E', E)$, et a fortiori pour la topologie forte; c'est donc un élément de E″ que nous noterons $\tilde{x}$, de sorte qu'on a identiquement $\langle x, x' \rangle = \langle x', \tilde{x} \rangle$. L'application $x \to \tilde{x}$ est une *application linéaire biunivoque* de E dans E″, dite *canonique*. Si on identifie E à un sous-espace de E″ par cette application, la topologie induite sur E par la topologie *forte* de E″ est toujours *plus fine* que la topologie de E. En effet, soit U un

voisinage convexe, cerclé et fermé de O dans E ; l'ensemble polaire U^0 est *borné* dans E′ pour la topologie forte, car pour tout ensemble borné B dans E, il existe $\lambda > 0$ tel que $B \subset \lambda U$, d'où $U^0 \subset \lambda B^0$, et on sait que les B^0 forment un système fondamental de voisinages de O dans E′. Désignons par U^{00} l'ensemble polaire de U^0 *dans* E″ ; $U^{00} \cap E$ n'est autre que l'ensemble polaire de U^0 *dans* E, donc U (prop. 1) : en d'autres termes, U est la trace sur E d'un voisinage fort de O dans E″ ce qui établit notre assertion. Mais en général, la topologie induite sur E par celle de E″ est *strictement plus fine* que celle de E, parce qu'il existera dans E′ des ensembles fortement bornés qui ne seront pas contenus dans un ensemble de la forme U^0. Toutefois, ce raisonnement et le th. 3 montrent aussitôt que :

Proposition 9. — *Si* E *est un espace* $\mathcal{F}$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, *l'application canonique* $x \to \tilde{x}$ *de* E *dans son bidual* E″ *est un isomorphisme.*

Lorsqu'on considère un espace localement convexe séparé E comme plongé dans son bidual E″, la topologie faible $\sigma(E'', E')$ induit évidemment sur E la topologie faible $\sigma(E, E')$; en outre, E est *partout dense* dans E″ pour la topologie faible $\sigma(E'', E')$; de façon plus précise, le raisonnement fait ci-dessus prouve (compte tenu de la prop. 1) que les *adhérences faibles* dans E″ des *voisinages forts* de O dans E sont *des voisinages forts* de O dans E″. Si E est un espace $(\mathcal{F})$ ou un espace $(\mathcal{LF})$, on obtient ainsi un *système fondamental de voisinages forts* de O dans E″ ; cela prouve en particulier que le bidual E″ d'un espace $(\mathcal{F})$ est *métrisable.*

On notera que si B est un ensemble *borné, convexe et cerclé* dans E, son adhérence *faible* dans E″ est identique à l'ensemble polaire B^{00} (dans E″) du voisinage B^0 de O dans E′ (prop. 1) ; c'est donc un ensemble *fortement borné* et *faiblement compact* dans E″. Mais, même lorsque E est un espace $(\mathcal{F})$ (non normable) ou un espace $(\mathcal{LF})$, on ignore si *tout* ensemble fortement borné dans E″ est *contenu* dans un ensemble B^{00} ; nous dirons qu'un espace E est *distingué* s'il a cette propriété.

Nous dirons qu'un espace localement convexe séparé E est *réflexif* si l'application canonique $x \to \tilde{x}$ est un *isomorphisme* de E *sur* E″. Tout espace réflexif est *distingué.*

Nous dirons que E est *semi-réflexif* si $x \to \tilde{x}$ applique E sur E″, mais n'est pas nécessairement un isomorphisme [5]. Dire que E est

[5] Nous verrons plus loin (note [7]) des exemples très simples d'espaces semi-réflexifs et non réflexifs.

un espace semi-réflexif signifie encore que dans E′ *tout ensemble convexe fortement fermé est faiblement fermé.*

Pour que l'espace E soit *semi-réflexif*, il faut et il suffit, d'après le th. de Mackey-Arens (cf. n° 2) que *tout ensemble faiblement fermé et borné dans* E *soit faiblement compact* (ce résultat a été obtenu indépendamment par G. Köthe). En effet, cette condition entraîne que tout ensemble *convexe* fermé et borné dans E est faiblement compact, et par suite que la topologie forte sur E′ est identique à $\tau(E', E)$, d'où résulte que $E'' = E$ d'après le th. de Mackey-Arens. Réciproquement, le même raisonnement montre que si $\tau(E', E)$ est identique à la topologie forte sur E′, tout ensemble convexe, cerclé, fermé et borné dans E est contenu dans un ensemble faiblement compact, donc est faiblement compact ; comme tout ensemble faiblement fermé et borné est contenu dans un ensemble convexe, cerclé, fermé et borné, il est faiblement compact. Ce résultat, joint à la prop. 9, montre donc que :

Théorème 4. — *Si* E *est un espace* $(\mathfrak{F})$ *ou un espace* $(\mathfrak{LF})$, *pour que* E *soit réflexif, il faut et il suffit que tout ensemble faiblement fermé et borné dans* E *soit faiblement compact.*

En d'autres termes, un espace $(\mathfrak{F})$ ou $(\mathfrak{LF})$ qui est semi-réflexif, est réflexif.

Un cas important où la condition du th. 4 est vérifiée se présente lorsque l'espace E vérifie la condition plus restrictive suivante : *tout ensemble fortement fermé et borné est fortement compact.* Il est bien connu qu'un espace de Banach ne peut satisfaire à cette condition que s'il est de dimension finie ; mais il n'en est pas de même des espaces $(\mathfrak{F})$ ou $(\mathfrak{LF})$. Nous dirons qu'un espace $(\mathfrak{F})$ $\big($resp. $(\mathfrak{LF})\big)$ satisfaisant à cette condition est un *espace* $(\mathfrak{M})$ $\big($resp. $(\mathfrak{LM})\big)$. Par exemple, il est classique que l'espace des *fonctions entières* (n° 3) est un espace $(\mathfrak{M})$. De même, dans l'espace $\mathfrak{D}_K$ (n° 2), si H est un ensemble borné, il résulte du th. des accroissements finis que H est *équicontinu,* et il en est de même de l'ensemble $H^{(k)}$ des dérivées k-èmes des fonctions de H, quel que soit l'entier $k > 0$. Le th. d'Ascoli $\big($[2], chap. x, § 4, th. 1$\big)$ montre alors que si Φ est un ultrafiltre sur H, la fonction f converge uniformément dans K vers une limite ainsi que toutes ses dérivées, suivant l'ultrafiltre Φ, autrement dit, H est relativement compact pour la topologie forte, donc $\mathfrak{D}_K$ est un espace $(\mathfrak{M})$. Quant aux espaces $(\mathfrak{LM})$, il résulte immédiatement des prop. 2 et 4 qu'on peut les caractériser comme

des espaces $(\mathcal{LF})$ ayant une suite de définition (E_n) formée d'espaces $(\mathcal{M})$. En particulier, l'espace $\mathcal{D}$ (n° 3) est un espace $(\mathcal{LM})$.

Proposition 10. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{M})$ *ou un espace* $(\mathcal{LM})$. *Dans le dual* E′ *tout ensemble borné et fortement fermé est fortement compact.*

En effet, un tel ensemble H est équicontinu (th. 3) et la topologie faible sur H est identique à la topologie $\mathfrak{T}_c$ de la convergence uniforme dans les parties compactes de E ; mais en vertu de l'hypothèse, $\mathfrak{T}_c$ et $\mathfrak{T}_b$ sont identiques sur E′, donc sur H les topologies faible et forte coïncident : si H est convexe, H est faiblement fermé, donc (th. 3) faiblement compact, et par suite fortement compact ; sinon l'enveloppe convexe fortement fermée de H est bornée, donc fortement compacte, et par suite il en est de même de H.

Nous venons de voir dans la prop. 10 que sur un ensemble H borné dans E′ les topologies forte et faible coïncident ; il en est de même sur un ensemble B borné dans E : en effet, en se limitant au cas où B est convexe et fermé, B est compact à la fois pour la topologie forte et pour la topologie faible, donc ces topologies induisent la même topologie sur B ([4], chap. I, § 10, th. 1).

On en conclut que, dans E ou dans E′, une *suite faiblement convergente* est aussi *fortement convergente* (vers la même limite), l'ensemble de ses éléments étant borné. Il en résulte que si Φ est un filtre à base *dénombrable* sur E ou E′, qui est *faiblement convergent*, il est aussi *fortement convergent* ; sinon ([4], chap. I, § 5, prop. 10), il existerait un filtre élémentaire plus fin que Φ, faiblement convergent mais non fortement convergent, contrairement à ce qu'on vient de voir.

9. **Dual fort d'un sous-espace. Dual fort d'un espace quotient.** — Soit E un espace localement convexe séparé, V un sous-espace vectoriel fermé de E. On sait ([5], p. 116) qu'il existe une application linéaire biunivoque (dite *canonique*) du dual V′ de V sur l'espace quotient E'/V^0 du dual E′ de E par le sous-espace V^0 orthogonal à V ; en outre, si on munit V′ de la topologie faible $\sigma(V', V)$, et E'/V^0 de la topologie quotient par V^0 de la topologie $\sigma(E', E)$, cette application canonique est un *isomorphisme*.

Considérons maintenant sur E'/V^0 la topologie quotient par V^0 de la topologie *forte* de E′ ; on a un système fondamental de voisinages de 0 pour cette topologie en prenant les images canoniques (par

l'homomorphisme canonique φ de E' sur E'/V^0) des ensembles $B^0 + V^0$, où B parcourt l'ensemble des parties *bornées*, fermées, convexes et cerclées de E. Mais, comme E'/V^0 est séparé, les voisinages *fermés* de O dans cet espace forment un système fondamental de voisinages de O ; pour un tel voisinage U, $\overset{-1}{\varphi}(U)$ contient donc l'adhérence *forte* d'un ensemble de la forme $B^0 + V^0$; autrement dit, les images canoniques par φ des adhérences fortes des ensembles convexes $B^0 + V^0$ dans E' forment un système fondamental de voisinages de O dans E'/V^0. Supposons maintenant que E soit *semi-réflexif*, donc que dans E' les adhérences forte et faible d'un ensemble convexe soient identiques ; alors l'adhérence forte de $B^0 + V^0$ dans E' est identique à $(B \cap V)^0$ (cor. de la prop. 1). Mais $B \cap V$ parcourt l'ensemble des parties bornées, fermées, convexes et cerclées de V ; donc nous avons démontré la première partie de la proposition suivante :

PROPOSITION 11. — *Soit* E *un espace semi-réflexif,* V *un sous-espace fermé de* E. *Quand on munit* V' *de la topologie forte, et* E'/V^0 *de la topologie quotient par* V^0 *de la topologie forte de* E', *l'application canonique de* V' *sur* E'/V^0 *est un isomorphisme ; en outre* V *est semi-réflexif.*

La seconde partie est immédiate, car la topologie faible $\sigma(V, V')$ est identique à la topologie induite sur V par $\sigma(E, E')$ ([5], p. 116), et comme tout ensemble borné dans E est faiblement relativement compact, il en est de même de tout ensemble borné dans V.

COROLLAIRE. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *réflexif,* V *un sous-espace fermé de* E. V *est un espace* $(\mathcal{F})$ *réflexif, et son dual fort est isomorphe à* E'/V^0, *muni de la topologie quotient par* V^0 *de la topologie forte de* E'.

Le même corollaire s'applique à un espace $(\mathcal{LF})$ E et à un sous-espace fermé V de E, *pourvu qu'on sache que* V *est un espace* $(\mathcal{F})$ *ou* $(\mathcal{LF})$, résultat que nous ne savons démontrer ni infirmer dans le cas général. En tout cas, si (E_n) est une suite de définition de E, et si E est réflexif, chacun des E_n est réflexif et E'_n est isomorphe (fortement) à E'/E_n^0 ; d'ailleurs il résulte aussitôt du th. 4 et de la prop. 4 que réciproquement, lorsque chacun des espaces E_n est réflexif, E est lui-même réflexif.

Reprenons un espace localement convexe séparé E quelconque, et un sous-espace fermé V de E. On sait qu'il existe une application linéaire biunivoque (dite *canonique*) du dual de l'espace quotient E/V

sur le sous-espace V^0 de E' orthogonal à V ; en outre si on munit $(E/V)'$ de la topologie faible, et V^0 de la topologie induite par la topologie faible $\sigma(E', E)$, cette application canonique est un *isomorphisme* ([5], p. 117, th. 8). Si on considère maintenant sur $(E/V)'$ la topologie forte, on aura un système fondamental de voisinages de O pour cette topologie en considérant les images réciproques, par l'application canonique, des parties $(C+V)^0 = C^0 \cap V^0$ de V^0, où C parcourt l'ensemble des parties de E dont l'image canonique dans E/V est *bornée*. Il est clair que si C est borné *dans* E, son image canonique dans E/V est bornée, mais rien ne permet d'affirmer a priori que pour tout ensemble borné K *dans* E/V, il existe un ensemble borné dans E dont l'image canonique dans E/V contienne K. On peut donc seulement dire que l'application canonique de $(E/V)'$ sur V^0 est *fortement continue*, mais, lorsque E n'est pas un espace normable rien ne permet de dire que cette application soit un isomorphisme fort.

10. **La topologie $\mathfrak{T}_c$ sur le dual d'un espace $(\mathcal{F})$ ou d'un espace $(\mathcal{LF})$.** Sur le dual E' d'un espace localement convexe séparé E, la topologie $\mathfrak{T}_c$ de la convergence uniforme dans les parties compactes de E est en général distincte de la topologie faible et de la topologie forte ; elle ne peut être identique à la topologie faible que si tout ensemble compact dans E est de dimension *finie*, et elle ne peut être identique à la topologie forte que si tout ensemble borné dans E est contenu dans l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble compact ; lorsque E est *complet*, cela entraîne que tout ensemble *borné* dans E est (*fortement*) *relativement compact*. En particulier, si E est un espace $(\mathcal{F})$, $\mathfrak{T}_c$ ne peut être identique à la topologie faible que si E est de *dimension finie* (car dans un espace $(\mathcal{F})$ de dimension infinie, il existe une suite fortement convergente vers O et engendrant un sous-espace de dimension infinie) ; et $\mathfrak{T}_c$ ne peut être identique à la topologie forte que si E est un espace $(\mathcal{M})$ (n° 8). De là, on déduit aussitôt que si E est un espace $(\mathcal{LF})$, (E_n) une suite de définition de E, la topologie $\mathfrak{T}_c$ sur E' ne peut être identique à la topologie faible que si les E_n sont de dimension finie, et elle ne peut être identique à la topologie forte que si les E_n sont des espaces $(\mathcal{M})$, c'est-à-dire si E est un espace $(\mathcal{LM})$.

Proposition 12. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$. *Le dual* E', *muni de la topologie* $\mathfrak{T}_c$, *est complet.*

En effet, soit Φ un filtre de Cauchy sur E' pour la structure uniforme déduite de $\mathcal{T}_c$; il converge simplement (dans E) vers une forme linéaire u_0 sur E, et comme Φ converge uniformément dans toute partie compacte de E, u_0 est continue dans toute partie compacte de E. La prop. 12 est donc équivalente à la suivante :

Proposition 13. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$. *Toute forme linéaire* u_0 *sur* E, *continue dans toute partie compacte de* E, *est continue dans* E.

Supposons d'abord que E soit un espace $(\mathcal{F})$; si u_0 n'était pas continue dans E, il existerait (puisque E est métrisable) une suite (x_n) de points de E tendant vers O et telle que $u_0(x_n) = 1$ pour tout n; u_0 ne serait donc pas continue dans l'ensemble compact formé des x_n et de O. Si E est un espace $(\mathcal{LF})$, et (E_n) une suite de définition de E, le raisonnement précédent montre que u_0 est continue dans chacun des E_n, donc dans E (prop. 5).

Corollaire. — *L'espace* E', *muni de la topologie* $\tau(E', E)$, *est complet.*

En effet, si Φ est un filtre de Cauchy sur E' pour la topologie $\tau(E', E)$, il converge simplement vers une forme linéaire u_0 sur E, qui est continue dans toute partie convexe et faiblement compacte de E, et a fortiori dans toute partie fortement compacte K de E (l'enveloppe fermée convexe de K étant fortement compacte); donc $u_0 \in E'$, ce qui démontre le corollaire.

Proposition 14. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$. *Le dual de* E' *muni de la topologie* $\mathcal{T}_c$, *est identique à* E.

Cette proposition est vraie, plus généralement, pour tout espace E où *l'enveloppe fermée convexe d'un ensemble compact est un ensemble compact,* car alors la topologie $\mathcal{T}_c$ sur E' est *moins fine* que $\tau(E', E)$, donc, en vertu du th. de Mackey-Arens (cf. n° 2), le dual de E' muni de $\mathcal{T}_c$ est identique à E. La condition précédente est remplie lorsque E est *complet,* puisque l'enveloppe convexe d'un ensemble précompact est toujours un ensemble précompact ; en particulier elle est remplie pour un espace $(\mathcal{F})$. Elle est aussi remplie pour un espace $(\mathcal{LF})$, car si (E_n) est une suite de définition d'un tel espace E, tout ensemble compact dans E est contenu dans un E_n (prop. 4)[6].

[6] Voici par contre un exemple où cette condition n'est pas vérifiée. Soit F un espace de Hilbert séparable, (e_n) une base orthonormale de F, E le sous-espace de F engendré par les e_n (espace des combinaisons linéaires finies des e_n, qui est partout dense dans F); le dual E' de E est identique à F. Nous allons voir que, dans E, tout ensemble *convexe*

Corollaire. — *L'espace* E′, *muni de la topologie* $\mathfrak{T}_c$, *est semi-réflexif* (7).

Nous allons maintenant généraliser aux espaces ($\mathcal{F}$) un théorème connu de la théorie des espaces de Banach ([2], p. 119-121) :

Théorème 5. — *Soit* E *un espace* ($\mathcal{F}$). *La topologie* $\mathfrak{T}_c$ *sur* E′ *est la plus fine des topologies* $\mathfrak{T}$ *sur* E′ *qui, sur toute partie bornée de* E′, *induisent la même topologie que la topologie faible.*

Le th. 2 prouve que les topologies induites par $\mathfrak{T}_c$ et par la topologie faible sur une partie bornée quelconque de E′ sont identiques. Soit inversement $\mathfrak{T}$ une topologie ayant cette propriété ; nous allons prouver que si W est un ensemble ouvert pour $\mathfrak{T}$ et contenant O, W est un voisinage de O pour $\mathfrak{T}_c$, ce qui démontrera le théorème. Soit (U_n) une suite décroissante de voisinages convexes, cerclés et fermés de O dans E, formant un système fondamental de voisinages. Le théorème sera une conséquence du lemme suivant :

Lemme. — *Pour tout entier* $n \geqslant 0$, *il existe un ensemble fini* $B_n \subset U_n$ *tel que, si on pose* $A_n = \bigcup_{p=0}^{n-1} B_p$, *l'ensemble* $U_n^0 \cap A_n^0$ *soit contenu dans* W.

Supposons ce lemme démontré ; la réunion A des A_n et de O est évidemment un ensemble compact dans E ; on a $A^0 \subset A_n^0$ pour

et *faiblement compact* K est nécessairement de dimension *finie*. En effet, supposons K de dimension infinie : il existe alors une suite croissante (n_k) d'entiers, et une suite (a_k) de points de K telle que la composante de a_k sur e_{n_k} soit $\neq 0$ et que pour tout $h < k$, les composantes de a_h sur les e_n d'indice $n \geqslant n_k$ soient toutes nulles. Définissons alors par récurrence une suite (t_k) de nombres réels > 0 tels que $\sum_{k=1}^{\infty} t_k < +\infty$, et que, dans $t_{k+1}a_{k+1}$, le coefficient de chacun des e_{n_h} d'indice $h \leqslant k$ soit, en valeur absolue, au plus égal au coefficient du même e_{n_h} dans $\sum_{i=1}^{k} t_i a_i$, multiplié par $1/4^k$. Comme K est borné, la série $\sum_{k=1}^{\infty} t_k a_k$ est convergente dans F vers un élément a, qui a une composante $\neq 0$ sur chacun des e_{n_k} en raison du choix des t_k ; si $t = \sum_{k=1}^{\infty} t_k$, a/t est limite forte dans F d'une suite d'éléments appartenant à l'ensemble convexe K ; il est donc aussi limite faible de cette suite, et comme K est supposé faiblement compact, a/t devrait appartenir à K, ce qui est impossible par construction. Par contre, il existe dans E des ensembles fortement compacts (et à plus forte raison faiblement compacts) et de dimension infinie, par exemple l'ensemble formé de O et des e_n/n. On notera qu'il résulte de ce qui précède que, sur E′, la topologie $\tau(E', E)$ est *identique à la topologie faible* $\sigma(E', E)$ et par suite que E′ n'est pas complet pour cette topologie.

(7) Si E n'est pas un espace ($\mathcal{M}$) ou un espace ($\mathcal{LM}$), on voit donc que E′, muni de la topologie $\mathfrak{T}_c$, est un espace *semi-réflexif*, mais *non réflexif*.

tout n, donc $A^0 \cap U_n^0 \subset W$ pour tout n, et comme la réunion des U_n^0 est l'espace E' tout entier, on a $A^0 \subset W$, et A^0 est un voisinage de O pour $\mathcal{T}_c$.

Pour démontrer le lemme, raisonnons par récurrence sur n : supposons les ensembles B_p définis pour $p < n$ de sorte que $U_n^0 \cap A_n^0 \subset W$, et considérons l'ensemble K_n, intersection de U_{n+1}^0 et du complémentaire de W. La topologie induite par $\mathcal{T}$ sur U_{n+1}^0 étant identique par hypothèse à la topologie induite par la topologie faible, K_n est faiblement fermé dans U_{n+1}^0, et comme U_{n+1}^0 est faiblement compact, il en est de même de K_n. Supposons qu'il n'existe aucun ensemble fini $B_n \subset U_n$ ayant la propriété voulue ; alors, pour tout ensemble fini $B \subset U_n$, $(A_n \cup B)^0 \cap U_{n+1}^0$ ne serait pas contenu dans W, donc $A_n^0 \cap B^0 \cap K_n$ ne serait pas vide. Mais, lorsque B parcourt l'ensemble des parties finies de U_n, les ensembles $A_n^0 \cap B^0 \cap K_n$ forment évidemment une base de filtre sur l'ensemble faiblement compact K_n ; comme ils sont faiblement fermés, ils auraient donc un point commun x'_0, qui appartiendrait donc à $A_n^0 \cap U_n^0 \cap K_n$, puisque U_n est la réunion de ses parties finies B ; mais par hypothèse $A_n^0 \cap U_n^0 \cap K_n$ est vide, et nous arrivons à une contradiction, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *Pour qu'un sous-espace vectoriel* H *de* E' *soit faiblement fermé, il suffit que son intersection avec tout ensemble borné et faiblement fermé dans* E' *soit faiblement compacte.*

En effet, l'intersection de H avec tout ensemble borné M dans E' est alors fermé pour la topologie induite sur M par la topologie faible, car c'est la trace sur M de $H \cap \overline{M}$ ($\overline{M}$ adhérence faible de M) qui est faiblement fermé par hypothèse ; le th. 5 montre par suite que H est fermé pour la topologie $\mathcal{T}_c$, donc intersection d'une famille d'hyperplans fermés pour $\mathcal{T}_c$: mais d'après la prop. 14, tout hyperplan fermé pour $\mathcal{T}_c$ est faiblement fermé, donc H est faiblement fermé.

Théorème 6. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$; *toute forme linéaire* u *sur* E', *dont la restriction à toute partie bornée de* E' *est faiblement continue, est faiblement continue dans* E' (autrement dit, est de la forme $x' \rightarrow \langle x, x' \rangle$ avec $x \in E$).

Nous démontrerons le théorème en plusieurs étapes.

a) Supposons d'abord que E soit un espace $(\mathcal{F})$, et soit $H = \overset{-1}{u}(0)$; l'hypothèse entraîne que l'intersection de H avec toute partie bornée et faiblement fermée de E' est faiblement fermée ;

d'après le cor. du th. 5, H est faiblement fermé, donc u est faiblement continue.

b) Supposons désormais que E soit un espace $(\mathfrak{LF})$, et soit (E_n) une suite de définition de E. Montrons en premier lieu qu'il existe un indice n tel que $u(x')=0$ dans E_n^0. En effet, dans le cas contraire, en remplaçant au besoin (E_n) par une suite extraite, il existerait une suite (x'_n) de points de E', telle que $x'_n \in E_n^0$ et $x'_n \notin E_{n+1}^0$, et que $u(x'_n)=1$ pour tout n. Mais tout $x \in E$ appartient à un E_n, donc $\langle x, x'_n \rangle = 0$ à partir d'un certain rang : cela signifie que la suite (x'_n) converge faiblement vers O, donc est bornée dans E'. Mais si B est l'ensemble borné formé de O et des x'_n, u est par hypothèse faiblement continue dans B, et nous arrivons donc à une contradiction, ce qui établit notre assertion.

c) Soit θ l'application canonique du dual E'_n de E_n sur l'espace quotient E'/E_n^0 ; on sait (n° 9) que θ est un isomorphisme faible, mais peut-être pas un isomorphisme fort. Étudions les ensembles *bornés* dans E'_n ; comme E_n est un espace $(\mathfrak{F})$, on peut se borner à considérer les ensembles polaires W^0 *dans* E'_n des voisinages convexes, cerclés et fermés W de O dans E_n. Or, un tel voisinage est de la forme $V \cap E_n$, où V est un voisinage convexe, cerclé est fermé de O dans E. Si φ est l'homomorphisme canonique de E' sur E'/E_n^0, il résulte aussitôt des définitions que W^0 n'est autre que l'ensemble $\overset{-1}{\theta}\big(\varphi((V \cap E_n)^0)\big)$, $(V \cap E_n)^0$ étant l'ensemble polaire de $V \cap E_n$ *dans* E'. Or, V^0 est faiblement compact, donc $V^0 + E_n^0$ est faiblement fermé dans E' $\big([4]$, chap. III, § 3, exerc. $15\big)$; il en résulte (cor. de la prop. 1) que $(V \cap E_n)^0 = V^0 + E^0$. On voit donc que tout ensemble borné dans E'_n est contenu dans un ensemble de la forme $\overset{-1}{\theta}\big(\varphi(V^0 + E_n^0)\big)$.

d) Comme on a $u(x')=0$ dans E_n^0, u définit, par passage au quotient, une forme linéaire $\bar{u}$ sur E'/E_n^0 telle que $u = \bar{u}\circ\varphi$, donc aussi une forme linéaire $v = \bar{u}\circ\theta$ sur E'_n. Il suffit de prouver que v est *faiblement continue* dans E'_n, et pour cela, d'après a), que l'intersection de $L = \overset{-1}{v}(0)$ et de toute partie bornée et faiblement fermée de E'_n est faiblement fermée. Or, si $H = \overset{-1}{u}(0)$, on a $E_n^0 \subset H$, donc $H \cap (V^0 + E_n^0) = (H \cap V^0) + E_n^0$; d'après l'hypothèse, $H \cap V^0$ est faiblement compact, donc $\big([4]$, chap. III, § 3, exerc. $15\big)$ $(H \cap V^0) + E_n^0$ est faiblement fermé ; comme

$$L \cap \overset{-1}{\theta}\big(\varphi(V^0 + E_n^0)\big) = \overset{-1}{\theta}\Big(\varphi\big(H \cap (V^0 + E_n^0)\big)\Big)$$

et que θ est un isomorphisme faible, le théorème est complètement démontré, compte tenu de c).

Corollaire. — *Tout espace* $(\mathcal{LF})$ *est complet* [8].

Soit Φ un filtre de Cauchy sur un espace $(\mathcal{LF})$ E ; la topologie forte sur E est identique à la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de E′ (prop. 9), donc Φ converge simplement (dans le dual algébrique E'^* de E′) vers une forme linéaire u sur E′, qui est faiblement continue dans toute partie bornée de E′, puisqu'elle est limite uniforme dans toute partie bornée de E′ de formes linéaires faiblement continues dans cette partie. Le th. 6 montre que u est faiblement continue dans E′, donc de la forme $x' \rightarrow \langle x, x' \rangle$ où $x \in E$; par suite Φ converge fortement vers x.

Proposition 15. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, V *un sous-espace fermé de* E. *L'application canonique du dual* V′ *de* V *sur l'espace quotient* E'/V^0 *est un isomorphisme quand on munit* V′ *de la topologie* $\mathcal{T}_c$ *et* E'/V^0 *de la topologie quotient de* $\mathcal{T}_c$ *par* V^0 (cf. [6]).

La démonstration est analogue à celle de la prop. 11 : si φ est l'homomorphisme canonique de E′ sur E'/V^0, un système fondamental de voisinages de 0 dans E'/V^0 pour la topologie quotient de $\mathcal{T}_c$ par V^0 est formé des images par φ des adhérences, *pour la topologie* $\mathcal{T}_c$, des ensembles $K^0 + V^0$, où K parcourt l'ensemble des parties compactes, convexes et cerclées de E. Mais d'après la prop. 14, l'adhérence de $K^0 + V^0$ pour $\mathcal{T}_c$ est identique à l'adhérence *faible* de cet ensemble, donc à $(K \cap V)^0$ (cor. de la prop. 1) ; or $K \cap V$ parcourt l'ensemble des parties compactes, convexes et cerclées de V quand K parcourt l'ensemble des parties compactes, convexes et cerclées de E, d'où la proposition.

Cette démonstration s'applique d'ailleurs à tout espace E où l'enveloppe fermée convexe d'un ensemble compact est un ensemble compact, puisque la prop. 14 est valable pour un tel espace.

11. Suites faiblement convergentes dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$.

Commençons par généraliser aux espaces $(\mathcal{F})$ un théorème de Banach ([2], p. 124, th. 4) :

Proposition 16. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *dans lequel il existe un*

[8] M. Köthe nous a communiqué une démonstration directe plus simple de cette proposition.

ensemble dénombrable partout dense (pour la topologie forte) ; il existe alors dans le dual E′ *un ensemble dénombrable partout dense pour la topologie faible.*

En effet, considérons un système fondamental dénombrable (U_n) de voisinages de O, qu'on peut supposer convexes et cerclés. Soit (a_n) une suite de points partout dense dans E ; pour tout entier m, l'ensemble des points $(\langle a_k, x'\rangle)_{1\leqslant k\leqslant m}$, où x' parcourt U_n^0, est une partie F_{mn} de l'espace de dimension finie $\mathbf{C}^m$; il existe donc une partie dénombrable B_{mn} de U_n^0 tel que l'image par l'application $x' \rightarrow (\langle a_k, x'\rangle)_{1\leqslant k\leqslant m}$ de B_{mn} soit partout dense dans F_{mn}. Soit B_n la réunion (dénombrable) des B_{mn} ; par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $x' \in U_n^0$ et tout entier m, il existe $b' \in B_n$ tel que $|\langle a_k, x' - b'\rangle| \leqslant \varepsilon$ pour $1 \leqslant k \leqslant m$; d'autre part, si $(c_h)_{1\leqslant h\leqslant p}$ est une suite finie quelconque de points de E, il existe p indices k_h tels que $c_h - a_{k_h} \in \varepsilon U_n$, donc $|\langle c_h, z'\rangle - \langle a_{k_h}, z'\rangle| \leqslant \varepsilon$ pour tout $z' \in U_n^0$; il existe donc $b' \in B_n$ tel que $|\langle c_h, x' - b'\rangle| \leqslant 3\varepsilon$ pour $1 \leqslant h \leqslant p$, ce qui montre que B_n est faiblement partout dense dans U_n^0. Comme E′ est la réunion des U_n^0, la réunion (dénombrable) B des B_n est faiblement partout dense dans E′, ce qui démontre la proposition.

Nous allons nous appuyer sur cette proposition pour généraliser deux résultats démontrés par Šmulian [14] et Eberlein [7] pour les espaces de Banach.

Proposition 17. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, *et soit* (x_n) *une suite de points de* E *telle que toute suite extraite de* (x_n) *admette une valeur d'adhérence faible dans* E. *Alors il existe une suite extraite de* (x_n) *qui est faiblement convergente vers un point de* E.

Si V est le sous-espace vectoriel fermé engendré par les x_n, tout revient à démontrer la proposition dans le sous-espace V, puisque la topologie $\sigma(V, V')$ est induite sur V par $\sigma(E, E')$.

D'autre part, l'hypothèse entraîne que l'ensemble B des x_n est *borné* ; sans quoi, il existerait $x' \in E'$ et une suite (x_{n_k}) extraite de (x_n) telle que $|\langle x_{n_k}, x'\rangle| \geqslant k$, et la suite (x_{n_k}) n'admettrait donc pas de valeur d'adhérence faible. Compte tenu de la prop. 4, on voit donc qu'on est ramené à démontrer la proposition lorsque E est un espace $(\mathcal{F})$ dans lequel existe un ensemble dénombrable fortement partout dense. On peut alors répéter presque sans modification le raisonnement de Šmulian [14], que nous allons rappeler pour être complet. D'après la prop. 16, il existe dans E′ une suite (a'_n) faiblement partout dense. Or, par hypothèse, pour tout $x' \in E'$, on peut extraire

de (x_n) une suite partielle (x_{n_k}) telle que $\langle x_{n_k}, x'\rangle$ ait une limite. Par le procédé diagonal, on peut donc extraire de (x_n) une suite (y_n) telle que, pour *tout* indice p, $\langle y_n, a'_p\rangle$ ait une limite. Par hypothèse, la suite (y_n) a une valeur d'adhérence faible y; montrons que cette valeur d'adhérence est la *seule*; en effet, si z est une autre valeur d'adhérence faible de (y_n) la limite de $\langle y_n, a'_p\rangle$ devant être à la fois égale à $\langle y, a'_p\rangle$ et à $\langle z, a'_p\rangle$, on a $\langle y-z, a'_p\rangle = 0$ pour tout p, et comme (a'_p) est une suite faiblement partout dense dans E', $y=z$. Il en résulte que y est *limite faible* de la suite (y_n), car dans le cas contraire, il y aurait un voisinage V de y tel qu'il existe une suite infinie (y_{n_k}) extraite de (y_n) et formée de points n'appartenant pas à V; cette suite aurait par hypothèse une valeur d'adhérence faible $z\neq y$, qui serait aussi valeur d'adhérence faible de (y_n), ce qui est absurde(9).

PROPOSITION 18. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$. *Pour qu'une partie* A *de* E *soit relativement faiblement compacte dans* E, *il suffit que toute suite de points de* A *admette une valeur d'adhérence faible dans* E.

En premier lieu, on voit comme dans la prop. 17 que cette condition entraîne que A est *borné* dans E, donc (prop. 4) on peut se limiter au cas où E est un espace $(\mathcal{F})$. Remarquons que dans le bidual E'' de E, l'ensemble A^{00} est compact pour la topologie faible $\sigma(E'', E')$, puisque A^0 est un voisinage de O dans E'; comme $A\subset A^{00}$, il suffit de prouver que l'adhérence faible de A *dans* E'' est *contenue dans* E. Or, soit $x''\in E''$ un point faiblement adhérent à A; en vertu du th. 6, il suffit de prouver que, pour tout voisinage convexe et cerclé U de O dans E, x'' est une forme linéaire *faiblement continue dans* U^0. Nous allons raisonner par l'absurde, en calquant la démonstration sur celle d'Eberlein [7]. Si la proposition n'était pas vraie il existerait un nombre $\alpha>0$ tel que, dans tout voisinage faible de O dans U^0, il existe un point x' pour

(9) Il n'est peut-être pas inutile d'observer que la proposition analogue à la prop. 17 pour le *dual* E' d'un espace $(\mathcal{F})$ est inexacte si E n'est pas réflexif. Prenons en effet pour E l'espace de toutes les suites bornées $x=(x_n)$ de nombres complexes, muni de la norme $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$, qui en fait un espace de Banach. Soit e'_n la forme linéaire continue définie dans E par la condition $\langle x, e'_n\rangle = x_n$ (n-ème forme coordonnée). Dans le dual E', la suite (e'_n) est bornée, donc admet au moins une valeur d'adhérence faible, toute boule fermée étant faiblement compacte dans E'. Mais *aucune suite* (e'_{n_k}) *extraite de* (e'_n) *n'admet de limite faible*: il existe toujours en effet un élément $x=(x_n)$ de E tel que x_{n_k} soit égal à 0 pour une infinité de valeurs de k et à 1 pour une infinité de valeurs de k.

lequel $|\langle x'', x'\rangle| \geqslant \alpha$; on en déduit aisément qu'on pourrait alors déterminer par récurrence une suite (x_n) de points de A et une suite (x'_n) de points de U^0 tels que $|\langle x'', x'_n\rangle| \geqslant \alpha$ pour tout n, $|\langle x_m, x'_n\rangle| \leqslant \frac{\alpha}{4}$ pour $m \leqslant n$ et $|\langle x'' - x_n, x'_m\rangle| \leqslant \frac{\alpha}{4}$ pour $n \geqslant m + 1$: il suffit de prendre x_1 arbitraire dans A, et de déterminer les x_n et x'_n dans l'ordre $x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n$, etc. D'après la prop. 17, en extrayant au besoin une suite partielle de (x_n), on peut supposer que la suite (x_n) *converge faiblement* vers un point $x \in$ E. Désignons par C l'ensemble convexe engendré par la suite (x_n) ; cet ensemble rencontre le voisinage $x + \frac{\alpha}{4}$U de x, car dans le cas contraire, il existerait un hyperplan réel fermé H séparant $x + \frac{\alpha}{4}$ U et C, en vertu du th. de Hahn-Banach, et on en conclut aisément que x ne pourrait être limite faible de la suite (x_n). Il existe donc une combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ telle que $\lambda_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ et $x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in \frac{\alpha}{4}$ U ; on en déduit $\left|\left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,\ x'\right\rangle\right| \leqslant \frac{\alpha}{4}$ pour tout $x' \in U^0$; en particulier $\left|\langle x, x'_{n+1}\rangle - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x_k, x'_{n+1}\rangle\right| \leqslant \frac{\alpha}{4}$, d'où, en raison du choix des x'_n, $|\langle x, x'_{n+1}\rangle| \leqslant \frac{\alpha}{2}$; on a d'autre part, en passant à la limite $|\langle x'' - x,\ x'_{n+1}\rangle| \leqslant \frac{\alpha}{4}$, d'où $|\langle x'',\ x'_{n+1}\rangle| \leqslant \frac{3\alpha}{4}$, contrairement à la définition de x'_n, ce qui achève la démonstration.

12. **Continuité forte et continuité faible.** — Soient E, F deux espaces localement convexes séparés ; on sait que toute application linéaire continue u de E dans F est aussi faiblement continue ([5], p. 122, th. 15).

Pour toute application linéaire continue u d'un espace localement convexe séparé E dans un espace localement convexe séparé F, nous désignerons par u' la *transposée* de u, c'est-à-dire l'application linéaire faiblement continue de F′ dans E′ satisfaisant à l'identité

$$(1) \qquad \langle u(x),\ y'\rangle = \langle x,\ u'(y')\rangle$$

où $x \in E$ et $y' \in F'$. Cette identité montre donc que, pour tout ensemble borné B dans E, on a $u'\left(\left(u(B)\right)^0\right) \subset B^0$; $u(B)$ étant borné dans F, on en déduit que u' est *fortement continue* dans F' ([1], p. 790, th. 1).

Proposition 19. — *Soient* E, F, E', F' *quatre espaces vectoriels tels que* E *et* F (resp. E' *et* F') *puissent être identifiés à des sous-espaces vectoriels des duals algébriques de* E' *et* F' (resp. E *et* F) (cf. n° 2). *Alors, toute application linéaire u de* E *dans* F, *continue pour les topologies* $\sigma(E, E')$ *et* $\sigma(F, F')$, *est aussi continue pour les topologies* $\tau(E, E')$ *et* $\tau(F, F')$.

En effet, u' étant faiblement continue dans F', transforme tout ensemble K convexe et faiblement compact dans F' en un ensemble convexe et faiblement compact dans E' ; d'après (1), on a $u\left(\left(u'(K)\right)^0\right) \subset K^0$, donc u est continue pour $\tau(E, E')$ et $\tau(F, F')$.

Corollaire. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, F *un espace localement convexe séparé quelconque. Si une application linéaire u de* E *dans* F *est faiblement continue, elle est fortement continue.*

On notera que ce résultat est aussi valable lorsque E est un espace *localement convexe métrisable* et non complet, car alors la topologie $\tau(E, E')$ sur E est encore identique à la topologie définie par la métrique sur E ([12], p. 527, th. 10).

Proposition 20. —*Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, F *un espace localement convexe séparé. Si une application linéaire v de* F' *dans* E' *est faiblement continue, elle est fortement continue.*

En effet, v est alors la transposée d'une application linéaire faiblement continue u de E dans F ; la proposition résulte donc de la prop. 19 et de la remarque qui la précède.

On notera que lorsque E et F ne sont pas réflexifs, il peut exister des applications linéaires de F' dans E' qui sont fortement continues, mais non faiblement continues (pour les topologies $\sigma(E', E)$ et $\sigma(F', F)$, bien entendu).

Si E et F sont deux espaces localement convexes séparés, on sait ([5], p. 122, th. 15) que tout homomorphisme u de E dans F est aussi un homomorphisme faible.

Proposition 21. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, *et soit* F *un espace* $(\mathcal{F})$. *Tout homomorphisme faible u de* E *dans* F *est aussi un homomorphisme fort.*

Considérons d'abord le cas où u est un *isomorphisme faible* de E dans F. Alors u est fortement continue (prop. 19) ; tout revient à montrer que l'application v de $u(E)$ sur E, réciproque de u, est fortement continue. Or $u(E)$, sous-espace vectoriel d'un espace $(\mathcal{F})$, est métrisable ; comme par hypothèse v est faiblement continue dans $u(E)$, v est aussi fortement continue (voir la remarque qui suit le cor. de la prop. 19).

Si maintenant u est un homomorphisme faible de E dans F, et si $H = \overset{-1}{u}(O)$, on peut écrire $u = w \circ \varphi$, où φ est l'homomorphisme canonique (fort et faible) de E sur E/H, et w un isomorphisme faible de E/H dans F ; d'autre part, u est fortement continue (prop. 19), donc w est fortement continue ; le raisonnement précédent s'applique donc et prouve que w est un isomorphisme fort, et par suite que u est un homomorphisme fort.

On notera que la démonstration prouve en réalité que si E est un espace localement convexe séparé *quelconque*, F un espace $(\mathcal{F})$ et u un *homomorphisme faible fortement continu* de E dans F, alors u est un *homomorphisme fort* de E dans F.

La théorie de la dualité faible [5], jointe à la prop. 21 et à la caractérisation des homomorphismes d'un espace $(\mathcal{F})$ dans un espace $(\mathcal{F})$ ([2], p. 40, th. 4), donne le théorème suivant :

Théorème 7. — *Soient* E *et* F *deux espaces* $(\mathcal{F})$, *u une application linéaire continue de* E *dans* F. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) *u est un homomorphisme fort de* E *dans* F ;

b) *u est un homomorphisme faible de* E *dans* F ;

c) *$u(E)$ est fermé dans* F ;

d) *u' est un homomorphisme faible de* F′ *dans* E′ ;

e) *$u'(F')$ est faiblement fermé dans* E′.

En effet, b) et e) sont équivalentes, ainsi que c) et d) ([5], p. 120, th. 14) ; a) et b) sont équivalentes d'après la prop. 21, et a) et c) d'après le th. de Banach précité.

Corollaire. — *Soient* E *et* F *deux espaces* $(\mathcal{F})$, *u une application linéaire continue de* E *dans* F. *Pour que u soit un isomorphisme (fort ou faible) de* E *dans* F, *il faut et il suffit que* $u'(F') = E'$; *u' est alors un homomorphisme faible de* F′ *sur* E′. *Si en outre u' est biunivoque, u est un isomorphisme de* E *sur* F, *u' un isomorphisme (fort et faible) de* F′ *sur* E′.

Lorsque E et F sont des espaces $(\mathfrak{F})$ non normables, et u un homomorphisme de E dans F, nous ignorons si son transposé u' est un homomorphisme *fort* de F' dans E' : cela tient à ce que nous ne savons pas déterminer en général la topologie forte du dual d'un sous-espace ou d'un espace quotient d'un espace $(\mathfrak{F})$ non normable. Mais on a le résultat suivant :

Proposition 22. — *Soient* E *et* F *deux espaces* $(\mathfrak{F})$, *u une application linéaire continue de* E *dans* F. *Si* u' *est un isomorphisme fort de* F' *dans* E', *u est un homomorphisme de* E *sur* F.

D'après le th. 7 et la théorie de la dualité faible ([5], p. 121, cor. du th. 14) tout revient à prouver que u' est un isomorphisme *faible* de F' dans E', ou encore (th. 7) que $u'(F')$ est *faiblement fermé* dans E'. Appliquons le corollaire du th. 5 qui caractérise les sous-espaces faiblement fermés dans E' : soit B un ensemble borné et faiblement fermé dans E'. Comme u' est un isomorphisme fort de F' dans E' et est faiblement continu, $\overset{-1}{u'}(B)$ est *borné* dans F' et faiblement fermé, donc (th. 3) faiblement compact ; u' étant faiblement continu, $B = u'(\overset{-1}{u'}(B))$ est faiblement compact, ce qui démontre la proposition.

13. Ensembles équicontinus dans $\mathfrak{L}(F', E')$.

Proposition 23. — *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes séparés. Soit* H *une partie de l'espace* $\mathfrak{L}(E, F)$ *des applications linéaires continues de* E *dans* F, *bornée pour la topologie* $\mathfrak{T}_b$. *Alors l'ensemble* M *des transposées* u' *des applications* $u \in H$ *est fortement équicontinu dans* F'.

Il faut prouver qu'étant donné un voisinage fort U de O dans E', il existe un voisinage fort V de O dans F' tel que les relations $y' \in V$, $u \in H$ entraînent $u'(y') \in U$. On peut toujours supposer que $U = B^0$, où B est un ensemble borné dans E ; la relation $u'(y') \in B^0$ signifie alors que $|\langle x, u'(y')\rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in B$, c'est-à-dire $|\langle u(x), y'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in B$. Or l'ensemble H étant borné par hypothèse dans $\mathfrak{L}(E, F)$, l'ensemble C, réunion des $u(B)$ lorsque B parcourt H, est borné dans F (n° 6) ; il suffit donc de prendre $V = C^0$ pour répondre à la question.

Proposition 24. — *Soient* E *un espace* $(\mathfrak{F})$ *ou* $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$, F *un espace localement convexe séparé. Soit* M *une partie de* $\mathfrak{L}(F', E')$ *formée d'applications linéaires faiblement continues de* F' *dans* E'. *Si* M *est*

borné pour la topologie $\mathcal{T}_s$ *de la convergence simple,* M *est fortement équicontinu* (et par suite borné pour la topologie $\mathcal{T}_b$).

En effet, soit H l'ensemble des transposées des applications $u' \in M$; M étant l'ensemble des transposées des applications $u \in H$, il suffit de montrer que H est une partie *bornée* de $\mathcal{L}(E, F)$, ou encore (th. 2) que pour tout $x \in E$, l'ensemble des $u(x)$, où u parcourt H, est borné dans F. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $y' \in F'$, l'ensemble des $\langle u(x), y' \rangle$ est borné dans C lorsque u parcourt H ; mais comme on a $\langle u(x), y' \rangle = \langle x, u'(y') \rangle$, cela résulte de l'hypothèse sur M.

14. **Fonctions bilinéaires continues dans $E' \times F'$.** — Le th. de Baire entraîne la conséquence bien connue suivante ([4], chap. IX, § 5, exerc. 22) : si E, F, G, sont trois espaces ($\mathcal{F}$), u une application bilinéaire de $E \times F$ dans G telle que, pour tout $x \in E$, $y \to u(x, y)$ soit continue dans F, et que, pour tout $y \in F$, $x \to u(x, y)$ soit continue dans E, alors u est *continue* dans $E \times F$. Nous allons démontrer un théorème analogue pour les fonctions bilinéaires définies dans $E' \times F'$:

THÉORÈME 8. — *Soient* E *et* F *deux espaces* ($\mathcal{F}$), G *un espace* ($\mathcal{F}$) *ou un espace* ($\mathcal{LF}$). *Soit* u *une application bilinéaire de* $E' \times F'$ *dans* G', *telle que, pour tout* $x' \in E'$, $y' \to u(x', y')$ *soit faiblement continue dans* F', *et que, pour tout* $y' \in F'$, $x' \to u(x', y')$ *soit faiblement continue dans* E'. *Dans ces conditions,* u *est une application bilinéaire fortement continue de* $E' \times F'$ *dans* G'.

Il faut prouver qu'étant donné un ensemble borné C dans G, il existe un ensemble borné $A \subset E$ et un ensemble borné $B \subset F$ tels que les relations $x' \in A^0$ et $y' \in B^0$ entraînent $u(x', y') \in C^0$, ou, ce qui revient au même, $|\langle z, u(x', y') \rangle| \leqslant 1$ pour tout $z \in C$. D'après l'hypothèse, pour tout $z \in G$ et tout $x' \in E'$, $y' \to \langle z, u(x', y') \rangle$ est une forme linéaire faiblement continue sur F', donc de la forme $y' \to \langle v_z(x'), y' \rangle$, où $v_z(x') \in E$. L'application $x' \to v_z(x')$ de E' dans F est linéaire ; en outre, elle est *faiblement continue* (pour $\sigma(E', E)$ et $\sigma(F, F')$) ; en effet, si y'_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ sont n points quelconques de F', chacune des formes linéaires $x' \to \langle z, u(x', y'_k) \rangle = \langle v_z(x'), y'_k \rangle$ est faiblement continue dans E', donc il existe un nombre fini de points x_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ de E tels que les relations $|\langle x_j, x' \rangle| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$ entraînent $|\langle v_z(x'), y'_k \rangle| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Nous allons montrer

maintenant que lorsque z parcourt C, l'ensemble des applications linéaires v_z est *fortement équicontinu* dans E'. En effet, soit W un voisinage convexe cerclé et fermé dans F : W^0 est borné dans F'; pour tout $x' \subset E'$, $y' \rightarrow u(x', y')$ est faiblement continue dans F', donc transforme l'ensemble borné W^0 de F' en un ensemble borné dans G'; en vertu de la prop. 24, l'ensemble des applications faiblement continues $x' \rightarrow u(x', y')$ de E' dans G', où y' parcourt W^0, est *fortement équicontinu*; cela signifie qu'il existe un ensemble borné $M \subset E$ tel que les relations $x' \in M^0$, $y' \in W^0$ entraînent $u(x', y') \in C^0$. Or, cela signifie encore : les relations $z \in C$, $x' \in M^0$ entraînent $|\langle v_z(x'), y'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $y' \in W^0$, c'est-à-dire $v_z(x') \in W$, ce qui prouve notre assertion.

Cela étant, il faut prouver qu'il existe un ensemble borné $A \subset E$ et un ensemble borné $B \subset F$ tels que pour tout $z \in C$, $v_z(A^0) \subset B^{00}$; autrement dit, qu'il existe un ensemble borné $A \subset E$ tel que la réunion des $v_z(A^0)$ soit *bornée* dans F. Or, soit (U_n) un système fondamental de voisinages convexes, cerclés et fermés de O dans F ; par hypothèse les ensembles $V_n = \bigcap_{z \in C} \overset{-1}{v_z}(U_n)$ sont des voisinages forts de O dans E', convexes, cerclés et faiblement fermés ; les ensembles V_n^0 sont donc bornés dans E. Or, comme E satisfait à la première condition de dénombrabilité de Mackey (prop. 3), il existe une suite de nombres $\lambda_n > 0$ tels que la réunion A des ensembles $\lambda_n V_n^0$ soit *bornée* dans E. On en déduit que $A^0 \subset \frac{1}{\lambda_n} V_n$ pour tout n, d'où $v_z(A^0) \subset \frac{1}{\lambda_n} U_n$ pour tout n et tout $z \in C$; mais comme (U_n) est un système fondamental de voisinages de O dans F, cela prouve bien que la réunion des $v_z(A^0)$ lorsque $z \in C$, est un ensemble *borné* dans F.

Il est à noter que le th. 8 n'est plus valable lorsqu'on suppose que l'un des espaces E, F est un espace $(\mathcal{LF})$, l'autre étant un espace $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{LF})$. Prenons en effet pour E un espace $(\mathcal{LF})$ ayant une suite de définition (E_n) formée d'espaces de Banach réflexifs (par exemple une somme directe (n° 3) d'espaces de Banach réflexifs) ; alors son dual E' est un espace $(\mathcal{F})$ (n° 7) ; prenons $F = E'$ d'où $F' = E$; pour forme bilinéaire u, prenons la forme bilinéaire canonique $(x, x') \rightarrow \langle x, x'\rangle$; elle est évidemment faiblement continue par rapport à chacune des deux variables, mais n'est pas fortement continue par rapport à l'ensemble des deux variables (n° 7), ce qui démontre notre assertion.

Nous ignorons si le th. 8 reste valable lorsque les applications partielles $x' \rightarrow u(x', y')$ et $y' \rightarrow u(x', y')$ sont supposées *fortement*

continues (même lorsque u est une *forme* bilinéaire). On a toutefois la généraislation partielle suivante :

THÉORÈME 9. — *Soient* E *un espace* ($\mathfrak{F}$), F *un espace* ($\mathfrak{F}$) *distingué* (n° 8). *Soit* G *un espace localement convexe séparé quelconque, et soit* u *une application bilinéaire de* $E' \times F'$ *dans* G'. *On suppose* E' *et* F' *munis de la topologie forte,* G' *de la topologie de la convergence uniforme dans un ensemble* $\mathfrak{S}$ *de parties bornées de* G (n° 2). *On suppose en outre que :*

a) *pour tout* $x' \in E'$, $y' \to u(x', y')$ *est continue dans* F' ;

b) *lorsque* y' *parcourt une partie bornée quelconque de* F', *les applications* $x' \to u(x', y')$ *forment un ensemble équicontinu.*

Dans ces conditions, u *est une application continue de* $E' \times F'$ *dans* G'.

Il faut prouver qu'étant donné un ensemble borné quelconque C appartenant à $\mathfrak{S}$, il existe un ensemble borné $A \subset E$ et un ensemble borné $B \subset E$ tels que les relations $x' \in A^0$, $y' \in B^0$ entraînent $u(x', y') \in C^0$, ou encore $|\langle z, u(x', y')\rangle| \leqslant 1$ pour tout $z \in C$. D'après la condition a), pour tout $x' \in E'$ et tout $z \in F$, $y' \to \langle z, u(x', y')\rangle$ est une forme linéaire fortement continue sur F', donc il existe un élément $v_z(x') \in F''$ tel que $\langle z, u(x', y')\rangle = \langle y', v_z(x')\rangle$. Nous allons montrer que lorsque z parcourt C, les applications v_z de E' dans F'' forment un *ensemble équicontinu*. En effet, soit W un voisinage convexe et cerclé de O dans F ; W^0 est borné dans F' ; d'après b), il existe donc un ensemble borné M dans E tel que les relations $x' \in M^0$, $y' \in W^0$ entraînent $u(x', y') \in C^0$, c'est-à-dire $|\langle z, u(x', y')\rangle| \leqslant 1$ pour tout $z \in C$, ou encore $|\langle y', v_z(x')\rangle| \leqslant 1$; cela signifie que la relation $x' \in M^0$ entraîne $v_z(x') \in W^{00}$ pour tout $z \in C$, et prouve donc notre assertion, puisque les W^{00} forment un système fondamental de voisinages de O dans F'' (n° 8).

Cela étant, il faut prouver qu'il existe un ensemble borné $A \subset E$ et un ensemble borné $B \subset F$ tels que, pour *tout* $z \in C$, on ait $v_z(A^0) \subset B^{00}$ (ensemble polaire de B^0 *dans* F''). Soit (U_n) un système fondamental de voisinages de O dans F'', convexes, cerclés et fermés ; les v_z formant un ensemble équicontinu pour $z \in C$, les ensembles $V_n = \bigcap_{z \in C} \overset{-1}{v_z}(U_n)$ sont des voisinages forts de O dans E', convexes, cerclés et fortement fermés. Il existe donc pour tout n un ensemble borné A_n dans E tel que $A_n^0 \subset V_n$; comme E satisfait à la première condition de dénombrabilité de Mackey (prop. 3), il existe une suite de nombres $\lambda_n > 0$ tels que la réunion A des ensembles

$\lambda_n A_n$ soit *bornée* dans E ; on en déduit que $A^0 \subset \frac{1}{\lambda_n} V_n$ dans E′, d'où $v_z(A^0) \subset \frac{1}{\lambda_n} U_n$ pour tout n et tout $z \in C$; comme (U_n) est un système fondamental de voisinages de O dans F″, cela signifie que la réunion des ensembles $v_z(A^0)$ (pour $z \in C$) est bornée dans F″. Mais comme F est supposé *distingué*, il existe un ensemble borné $B \subset F$ tel que $v_z(A^0) \subset B^{00}$ pour tout $z \in C$, ce qui achève la démonstration.

Les applications bilinéaires satisfaisant à la condition a) interviennent souvent dans les applications [13]. De façon générale si E, F, G sont trois espaces localement convexes séparés, on dit qu'une application bilinéaire u de $E \times F$ dans G est *séparément continue* si : a) lorsque y parcourt une partie bornée quelconque de F, les applications $x \rightarrow u(x, y)$ forment un ensemble *équicontinu ;* b) lorsque x parcourt une partie bornée quelconque de E, les applications $y \rightarrow u(x, y)$ forment un ensemble *équicontinu*. Le th. 9 montre en particulier que, dans les conditions de l'énoncé, si u est *séparément continue*, elle est *continue*. Mais il existe des applications bilinéaires qui sont *séparément continues* et *non continues ;* un exemple est donné par la *forme bilinéaire canonique* $(x, x') \rightarrow \langle x, x' \rangle$ sur $E \times E'$ lorsque E est un espace $(\mathcal{F})$ ou un espace $(\mathcal{LF})$ (n° 7) : en effet, si B est un ensemble borné dans E, B^0 est un voisinage de O dans E′, et on a $|\langle x, x' \rangle| \leqslant 1$ pour $x \in B$ et $x' \in B^0$; et de même, si C est un ensemble borné dans E′, C^0 est un voisinage de O dans E (th. 3), et on a encore $|\langle x, x' \rangle| \leqslant 1$ pour $x \in C^0$ et $x' \in C$.

15. **Problèmes non résolus.** — Pour terminer, récapitulons un certain nombre de questions qui se posent dans la théorie des espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$, et auxquelles nous ne savons pas répondre.

1. Soit E un espace $(\mathcal{LF})$, (E_n) une suite de définition de E. Si H est un sous-espace vectoriel de E tel que $H \cap E_n$ soit fermé pour tout n, H est-il fermé ? La réponse est affirmative quand H est un hyperplan (prop. 5).

2. Si E est un espace $(\mathcal{LF})$, H un sous-espace vectoriel fermé de E, H est-il un espace $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{LF})$? (La difficulté qui se présente ici, ainsi que dans la première question, est que dans un espace $(\mathcal{F})$, la somme de deux sous-espaces vectoriels fermés peut être non fermée.)

3. Un espace quotient d'un espace $(\mathcal{LF})$ par un sous-espace vectoriel fermé est-il un espace $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{LF})$?

4. Soit E un espace $(\mathcal{F})$ ou un espace $(\mathcal{LF})$, H un sous-espace fermé de E ; tout ensemble borné dans E/H est-il l'image canonique d'un ensemble borné dans E ?

5. Soit E un espace $(\mathcal{F})$ ou un espace $(\mathcal{LF})$, H un sous-espace fermé de E ; si E n'est pas réflexif, l'application canonique de H' sur E'/H^0 est-elle un isomorphisme fort ?

6. Soit E un espace $(\mathcal{F})$ ou un espace $(\mathcal{LF})$, u une forme linéaire sur le dual E' de E, telle que l'image par u de tout ensemble borné dans E' soit borné dans C ; la forme u est-elle fortement continue ?

7. Le bidual E d'un espace $(\mathcal{F})$ ou d'un espace $(\mathcal{LF})$ est-il fortement complet ? Si la réponse à la question 6 était affirmative, il en serait de même pour la question 7 (l'inverse n'est peut-être pas vrai).

8. Un espace $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{LF})$ est-il toujours *distingué*, autrement dit (n° 8), tout ensemble borné dans le bidual E'' de E est-il contenu dans l'adhérence faible d'un ensemble borné dans E ?

9. Le th. 5 est-il encore valable pour les espaces $(\mathcal{LF})$?

10. La prop. 21 et le th. 7 s'étendent-ils aux espaces $(\mathcal{LF})$?

11. Le th. 8 est-il encore valable pour une application bilinéaire u de $E' \times F'$ dans le dual G' d'un espace $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{LF})$, supposée telle que les applications linéaires $y' \to u(x', y')$ et $x' \to u(x', y')$ soient fortement continues ?

12. Dans le dual d'un espace $(\mathcal{F})$ E, une suite (x'_n) fortement convergente vers O est bornée ; mais il n'existe pas toujours d'ensemble U *ouvert* dans E tel que les formes linéaires $x'_n(x)$ convergent *uniformément vers* o *dans* U $\big([10]$, p. $327\big)$. Il serait intéressant de trouver des conditions suffisantes simples sur E pour que cette propriété soit vraie ; elle l'est dans la plupart des espaces $(\mathcal{F})$ qu'on rencontre dans les applications [13].

13. Il existe une analogie assez frappante entre les espaces $(\mathcal{LF})$ et les duals d'espaces $(\mathcal{F})$. Soit E un espace $(\mathcal{F})$, et soit (U_n) un système fondamental dénombrable de voisinages de O dans E, qu'on peut supposer décroissant. Dans le dual E', soit E'_n le sous-espace engendré par l'ensemble polaire U_n^0 ; E' est réunion de la suite croissante de sous-espaces vectoriels E'_n, dont chacun peut être considéré comme un dual d'espace normé (savoir le dual de l'espace séparé E_n associé à E muni de la topologie définie par le système de voisinages de O formé des ensembles λU_n, pour un n fixe). Le th. 2 montre que tout ensemble borné dans E' est contenu dans un

E'_n et borné dans cet espace, résultat correspondant à la prop. 4 pour les espaces $(\mathcal{LF})$. Cette analogie toutefois est loin d'être parfaite : en général, le sous-espace E'_n *n'est pas fermé* dans E'_{n+1} (quand on munit ces deux espaces de leurs topologies fortes de duals d'espaces normés), et la topologie forte de E' *n'induit pas nécessairement* sur E'_n la topologie forte du dual de l'espace normé E_n ([10], p. 327), contrairement à ce qui se passe pour les espaces $(\mathcal{LF})$. Inversement, le dual d'un espace $(\mathcal{F})$ vérifie toujours la *seconde condition de dénombrabilité* de Mackey (n° 7), tandis qu'il n'en est pas de même pour un espace $(\mathcal{LF})$ quelconque (n° 4). De même, nous avons vu que le th. 8, valable pour les duals d'espaces $(\mathcal{F})$, ne l'est pas pour les espaces $(\mathcal{LF})$. Il y aurait lieu d'examiner s'il n'est pas possible de faire rentrer à la fois les espaces $(\mathcal{LF})$ et les duals d'espaces $(\mathcal{F})$ dans une même théorie générale, qui expliquerait ces divergences.

14. Il est assez naturel de songer à généraliser la théorie des espaces $(\mathcal{LF})$ en considérant, au lieu d'une *suite croissante* (E_n) de sous-espaces d'un espace vectoriel E, un *ensemble filtrant croissant* (E_α) de sous-espaces de E, de puissance quelconque : on suppose naturellement que E est réunion des E_α, et que chaque E_α est muni d'une topologie $\mathcal{T}_\alpha$ pour laquelle E_α est un espace $(\mathcal{F})$, les topologies $\mathcal{T}_\alpha$ étant *compatibles* en ce sens que, si $E_\alpha \subset E_\beta$, $\mathcal{T}_\alpha$ est induite sur E_α par $\mathcal{T}_\beta$. On peut encore alors définir sur E une topologie $\mathcal{T}_\omega$ par la condition d'être la plus fine de celles qui induisent sur chacun des E_α une topologie moins fine que $\mathcal{T}_\alpha$. Mais nous allons voir sur un exemple que les espaces vectoriels topologiques qu'on obtient ainsi ne se comportent plus toujours comme les espaces $(\mathcal{LF})$.

Soit G l'ensemble des nombres ordinaux de première et de seconde classe, muni de la topologie usuelle dans laquelle un système fondamental de voisinages d'un point t est formé des intervalles semi-ouverts ayant ce point pour extrémité ; on sait que G, muni de cette topologie, est *localement compact*, et que tout ensemble compact dans G est contenu dans un intervalle $0 \leqslant t \leqslant \alpha$ $(\alpha \in G)$, intervalle que nous désignerons par I_α. Soit E l'espace vectoriel des fonctions complexes continues dans G et à support compact, et soit E_α le sous-espace de E formé des fonctions nulles dans le complémentaire de I_α ; nous prendrons pour $\mathcal{T}_\alpha$ la topologie de la convergence uniforme dans I_α, de sorte que les espaces E_α sont des espaces de Banach dont les topologies sont compatibles ; en d'autres termes, l'espace E

est ainsi muni d'une topologie $\mathcal{T}_\omega$ qui généralise celle de l'exemple 1° d'espace $(\mathcal{LF})$ donné au n° 3. Nous allons montrer ici que cette topologie n'est autre que la topologie de la *convergence uniforme* $\mathcal{T}_u$ dans G, et que par suite E, muni de cette topologie, est un *espace de Banach*.

En effet, il est clair que la topologie $\mathcal{T}_u$ induit sur chacun des E_α la topologie $\mathcal{T}_\alpha$; tout revient à prouver que $\mathcal{T}_\omega$ ne peut être *strictement plus fine* que $\mathcal{T}_u$. Or, s'il en était ainsi, il existerait un voisinage convexe cerclé V de O (pour $\mathcal{T}_\omega$) et une suite croissante (α_n) de points de G telle que, pour toute fonction $f \in V$, on ait $|f(\alpha_n)| \leq \frac{1}{n}$, comme on le voit aussitôt par récurrence sur n. Mais la suite (α_n) a une limite β dans G, donc on devrait avoir $f(\beta) = 0$ pour toute fonction $f \in V$; mais alors pour tout $\gamma > \beta$, l'intersection de V et de E_γ ne serait pas un voisinage de O pour la topologie $\mathcal{T}_\gamma$, contrairement à l'hypothèse.

Ce résultat entraîne en particulier que la prop. 4 n'est pas valable dans E : l'ensemble des $f \in E$ telles que $|f(t)| \leq 1$ pour tout $t \in G$, est borné mais non contenu dans un E_α. Il y aurait donc lieu d'examiner quelles sont les propriétés des espaces $(\mathcal{LF})$ qui se généralisent lorsqu'on remplace la suite croissante (E_n) par un ensemble filtrant croissant quelconque.

(Manuscrit reçu en août 1949.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Arens, Duality in linear spaces, *Duke Math. Journ.*, t. 14 (1947), p. 787-794.

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.

[3] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, livre II : Algèbre (*Act. Scient. et Ind.*, n^{os} 934, 1032 et 1044, Paris (Hermann), 1943-48).

[4] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, livre III : Topologie générale (*Act. Scient. et Ind.*, n^{os} 858, 916, 1029, 1045 et 1084, Paris (Hermann), 1940-49).

[5] J. Dieudonné, La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, *Annales de l'École Normale Supérieure*, t. 59 (1942), p. 107-139.

[6] J. Dieudonné, Natural homomorphisms in Banach spaces, *Proceedings of the American Mathematical Society*, t. 56 (1950).

[7] W. F. Eberlein, Weak compactness in Banach spaces, I, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, t. 33 (1947), p. 51-53.

[8] V. Ganapathy Iyer, On the space of integral functions, I, *Journal of the Indian Mathematical Society*, t. 12 (1948), p. 13-30.
[9] A. Kolmogoroff, Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, *Studia Mathematica*, t. 5 (1935), p. 29-33.
[10] G. Köthe, Die Stufenraüme, eine einfache Klasse linearer vollkommener Raüme, *Mathematische Zeitschrift*, t. 51 (1948), p. 317-345.
[11] G. W. Mackey, On infinite-dimensional linear spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, t. 57 (1945), p. 155-207.
[12] G. W. Mackey, On convex topological linear spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, t. 60 (1946), p. 520-537.
[13] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Paris, Hermann, 1950.
[14] V. Šmulian, Über lineare topologische Raüme, *Mat. Sbornik*, N. S., t. 7 (1941), p. 425-448.

Note ajoutée pendant la correction des épreuves. — MM. Mazur et Orlicz nous ont communiqué qu'ils ont déjà obtenu les propr. 9 et 20 et le th. 4 de notre travail, pour le cas des *espaces* $(\mathcal{F})$; leurs résultats doivent être publiés prochainement dans les *Studia Mathematica*. Mentionnons aussi dans la bibliographie, les travaux de M. Katětov sur la dualité et les ensembles polaires (*Bull. Int. Acad. Tchèque*, t. 53 (1943), n° 46, et *Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Carol.*, 1948, n° 181)

SYSTÈMES TOTAUX DE FONCTIONS HARMONIQUES

par **Jacques DENY** (Strasbourg).

Le problème de l'approximation des fonctions continues sur la frontière du compact E à l'aide de fonctions harmoniques dans un voisinage de E a fait l'objet de divers travaux au premier rang desquels il faut citer une note de M. Keldych et M. Lavrentieff (¹) et un article plus détaillé de M. Brelot (²). J'ai montré, dans une note quelque peu sommaire (³), que les résultats fondamentaux de ces auteurs peuvent être établis assez simplement à l'aide du théorème de Hahn-Banach. Je désire reprendre ici cette démonstration avec plus de détails, et apporter quelques compléments ; je terminerai par quelques remarques sur des questions annexes.

1. Fonctions harmoniques élémentaires.

On se placera dans l'espace euclidien R^m à $m \geqslant 2$ dimensions ; $|x|$ désignera la distance euclidienne de l'élément x à l'élément origine O.

On notera $h(x)$ la *fonction harmonique fondamentale* $|x|^{2-m}$ pour $m > 2$, $-\log|x|$ pour $m = 2$.

$H_n(x)$ étant un polynome harmonique homogène de degré n, on

(¹) *C. R.*, 204, 1937, p. 1788.

(²) *Bull. Soc. Math. de France*, 73, 1945, p. 55-70.

(³) *Ibid.*, p. 71-73. Un lapsus s'est glissé dans l'énoncé du théorème central, qu'il faut lire : « Pour que toute fonction continue sur la frontière d'un compact E puisse être approchée... », ou remplacer par le théorème 3 du présent travail. Le résultat auquel il est fait allusion a été retrouvé par M. Landkof : *Sur la densité de certains systèmes de fonctions harmoniques dans l'espace des fonctions continues sur un ensemble* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, 55, 1947, p. 7-8). Signalons également les études de G. Fichera dans le cas d'un compact limité par un nombre fini de surfaces régulières (cf. notamment : Applicazione della teoria del potenziale di superficie, etc. *Giornale Mat. Battaglini*, 78, 1948, p. 71-80).

appellera *fonctions harmoniques élémentaires* d'ordre n relatives à un point a situé à distance finie les fonctions de la forme :

$$\Phi_n^a(x) = \frac{H_n(x-a)}{|x-a|^{2n+m-2}} \quad \text{pour } n \geqslant 1$$
$$\Phi_0^a(x) = H_0 h(x-a) \quad (H_0 = \text{constante}).$$

Si a est à l'infini, on pose

$$\Phi_n^\infty(x) = H_n(x) \quad (n \geqslant 0).$$

Une telle fonction est harmonique en $x \neq a$; son expression canonique à l'aide des fonctions sphériques ou hypersphériques ne sera pas utilisée dans ce travail [4].

Si x est un point intérieur à la sphère S de centre o et de rayon R, les polynomes harmoniques H_n satisfont aux relations bien connues :

$$(1) \qquad H_n(x) = A_n R^{-1} \int_S H_n(y) h(x-y) d\sigma(y)$$

où $d\sigma$ est l'élément d'aire de S, et A_n est un coefficient numérique dont la valeur est :

$$A_n = (2n+m-2)/(m-2)s_m \quad \text{si} \quad m > 2, \ n \geqslant 0 \ (^5)$$
$$A_n = n/\pi \quad \text{si} \quad m = 2, \ n > 0.$$

La relation (1) tombe en défaut pour $m = 2$, $n = 0$; elle doit être alors remplacée par :

$$(1') \qquad \log R = \frac{1}{2\pi R} \int_C \log|x-y| d\sigma(y)$$

le point x étant intérieur à la circonférence C de centre o et de rayon R [6].

[4] Cette expression est particulièrement simple pour $m = 2$; si r et θ désignent les coordonnées polaires de $x - a$, les Φ_n^a sont, pour tout $n > 0$, les combinaisons linéaires des fonctions $\cos n\theta/r^n$, $\sin n\theta/r^n$.

[5] $s_m = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$ désigne l'aire de la sphère unité.

[6] On démontre le plus souvent la relation (1) en développant $h(x-y)$ suivant les puissances entières de $|x| = r$ (cf. par exemple le traité classique de Goursat, t. 3, pour $m = 3$) ; mais elle résulte immédiatement de la formule suivante, attribuée à Dini, qui est elle-même une conséquence facile du théorème de Green : si U est harmonique dans et sur la sphère S, on a, pour tout point x intérieur :

$$U(x) = \frac{1}{(m-2)s_m} \int_S \left[2\frac{dU}{dn_e} + (m-2)\frac{U}{R} \right] |x-y|^{2-m} d\sigma(y) \quad \text{pour } m > 2$$
$$U(x) - U(o) = -\frac{1}{\pi} \int_C \frac{dU}{dn_e} \log|x-y| d\sigma(y) \quad \text{pour } m = 2,$$

n_e désignant la normale extérieure à S.

Si x est extérieur à S, on obtient immédiatement, en appliquant (1) au point x' inverse de x, et tenant compte de $|y-x|=|y-x'||x|/R$ pour tout $y \in S$:

$$(2)\quad H_n(x)=A_n|x|^{2n+m-2}R^{-(2n+m-1)}\int_S H_n(y)h(x-y)\,d\sigma(y),$$

relation qui, pour $m=2$, $n=0$ doit être remplacée par

$$(2')\qquad \log|x|=\frac{1}{2\pi R}\int_C \log|x-y|\,d\sigma(y),$$

Les fonctions harmoniques élémentaires permettent d'écrire la relation (2) sous une forme toute semblable à (1) :

$$\Phi_n^a(x)=A_nR^{-1}\int_S \Phi_n^a(y)h(x-y)\,d\sigma(y)$$

pour tout x extérieur à la sphère S de centre a et de rayon R [7].

2. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un potentiel soit identiquement nul dans une région de l'espace ne contenant pas de masses.

Soit $U^\mu(x)=\int h(x-y)\,d\mu(y)$ le potentiel newtonien (logarithmique si $m=2$) engendré au point x par la mesure μ de signe quelconque, supposée à support compact. Soient D un domaine contenu dans le complémentaire de ce support, et a un point quelconque de D.

THÉORÈME 1. — *Pour que* U^μ *soit identiquement nul dans* D, *il faut et il suffit qu'on ait :*

$$\int \Phi_n^a(x)\,d\mu(x)=0 \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots)$$

pour toutes les fonctions harmoniques élémentaires relatives au point a.

En effet si a est à distance finie, le potentiel U^μ, qui est harmonique dans D, admet au voisinage de a un développement de la forme

$$U^\mu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x-a)$$

où F_n est un polynome harmonique homogène d'ordre n.

(7) Sauf encore dans le cas $m=2$, $n=0$.

Soit S une sphère de centre a et de rayon R assez petit pour que la boule fermée $|x-a|\leqslant R$ soit contenue dans D; deux polynomes harmoniques homogènes de degrés différents étant, comme il est bien connu, orthogonaux sur toute sphère de centre o, on a, si H_n désigne un tel polynome d'ordre n :

$$(3) \quad \int_S U^{\mu}(x)H_n(x-a)d\sigma(x)=\int_S H_n(x-a)F_n(x-a)d\sigma(x).$$

Pour que U^{μ} soit nul au voisinage de a (et par suite dans D), il faut et il suffit qu'on ait :

$$(4) \qquad \int_S U^{\mu}(x)H_n(x-a)d\sigma(x)=0$$

pour tout polynome harmonique homogène H_n; la condition est évidemment nécessaire; si inversement la relation (4) est satisfaite pour tout H_n il vient, en faisant $H_n=F_n$ dans (3) :

$$\int_S (F_n(x-a))^2 d\sigma(x)=0$$

d'où $F_n\equiv 0$, et ceci pour toute valeur de n, ce qui entraîne $U^{\mu}\equiv 0$. Mais les relations (4) s'écrivent :

$$\int d\sigma(x)\int H_n(x-a)h(x-y)d\mu(y)=0,$$

d'où, par interversion des intégrations, et compte tenu de (2) :

$$\int \frac{H_n(y-a)}{|y-a|^{2n+m-2}}d\mu(y)=0$$

sauf si $m=2$, $n=0$; mais en appliquant alors (2′) on constate que dans tous les cas (4) est équivalent à

$$\int \Phi_n^a(y)d\mu(y)=0$$

ce qui démontre le théorème.

Si maintenant a est le point à l'infini, on utilisera le développement uniformément convergent au voisinage de l'infini :

$$(5) \qquad U^{\mu}(x)=F_0 h(x)+\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x)|x|^{-(2n+m-2)}$$

où F_n est un polynome harmonique homogène d'ordre n; la

démonstration est alors toute semblable, mais ce sont les relations (1) et (1') qu'on appliquera.

Remarque. — Dans l'étude de certains problèmes d'approximation des fonctions harmoniques, il peut être utile de considérer des potentiels engendrés par des distributions qui ne sont plus nécessairement des mesures [8]. Soit T une telle distribution, à support compact; le potentiel $U^T = h(x)*T$ est une distribution bien déterminée qui, dans tout domaine D disjoint du support, coïncide avec une fonction harmonique. Le théorème précédent se généralise ainsi :

Pour que U^T soit identiquement nul dans D il faut et il suffit que

$$T\left(\Phi_n^a(x)\right) = 0 \text{ [9]}$$

pour toutes les fonctions harmoniques élémentaires relatives à un point a arbitrairement choisi dans D [10].

3. Définitions et lemmes.

Soit E un compact de R^m choisi une fois pour toutes; son complémentaire Ω est constitué par une suite (finie ou dénombrable) de domaines D_0 (non borné), D_1, ... Si a_p est un point arbitrairement choisi dans D_p ($p = 0, 1, \ldots$; a_0 peut être pris à l'infini), les fonctions harmoniques élémentaires relatives à a_p seront désignées par $\Phi_n^{a_p}$.

Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues sur la frontière $\overset{*}{E}$ de E (muni de la topologie de la convergence uniforme); on se propose d'étudier le sous-espace $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ sous-tendu par les $\Phi_n^{a_p}$, c'est-à-dire l'ensemble des limites uniformes des combinaisons linéaires finies des $\Phi_n^{a_p}$; à cet effet on va rappeler quelques résultats de théorie du potentiel.

(8) L. Schwartz, *Théorie des distributions* (à paraître prochainement aux *Actualités Sc. et Ind.*).

(9) Ces quantités ont un sens, car T est à support compact, et les fonctions Φ_n^a sont indéfiniment dérivables sur un voisinage de ce support.

(10) La démonstration donnée dans le cas des mesures s'étend sans difficultés, mais, lorsque a est le point à l'infini, il est essentiel d'observer que U^T admet au voisinage de ce point un développement tel que (5); en effet T étant à support compact, c'est la somme finie d'une mesure et de dérivées de mesures à support compact. U^T est donc la somme d'un potentiel engendré par une mesure à support compact, et d'un nombre fini de dérivées (au sens des distributions) de telles fonctions.

L'*extrémisée* d'une mesure μ est sa balayée μ' sur l'ouvert Ω (11). Les points *stables* (*instables*) de E sont les points réguliers (irréguliers) pour Ω (12) ; ou encore ce sont les points en lesquels Ω est non effilé (effilé). Les points stables sont partout denses sur $\overset{*}{E}$; en un tel point on a $U^{\mu} = U^{\mu'}$ (13). μ' ne charge pas l'ensemble des points instables ou intérieurs de E ; si μ charge seulement l'ensemble des points stables ou extérieurs, on a $\mu' = \mu$.

LEMME 1. — *Les mesures μ portées par* E *et d'extrémisée nulle sont caractérisées par l'une ou l'autre des propriétés suivantes :*

a) $U^{\mu} \equiv 0$ *sur* Ω.

b) $\int \Phi_n^{a_p} d\mu = 0$ *pour tous n et p.*

c) μ *est de la forme* $\mu = \lambda - \lambda'$, *où* λ *charge seulement l'ensemble des points instables ou intérieurs de* E, *et* λ' *est l'extrémisée de* λ.

a) est une conséquence immédiate des définitions (14) ; d'après le théorème 1, a) et b) sont équivalents ; enfin pour montrer c) il suffit d'observer que toute μ portée par E peut s'écrire $\mu = \alpha + \lambda$, où λ charge seulement l'ensemble des points instables et intérieurs, et α l'ensemble des points stables ; comme $\alpha' = \alpha$ et $\mu' = 0$, on a $\alpha + \lambda' = 0$, d'où le résultat ; cette décomposition c) est évidemment unique.

(11) Pour toutes les questions relatives à l'extrémisation et au balayage sur un ensemble quelconque, voir principalement les mémoires suivants : M. BRELOT, *Critères de régularité et de stabilité* (*Bull. Acad. Roy. de Belgique*, 1939, p. 125-139) ; M. BRELOT, *Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités* (*Journ. de Math.*, 24, 1945, p. 1-32) ; H. CARTAN, *Théorie générale du balayage en potentiel newtonien* (*Ann. Univ. de Grenoble*, 22, 1946, p. 221-280).

(12) Nous conservons, dans un but de concision, cette terminologie de KELDYCH et LAVRENTIEFF. Le terme *irrégulier*, qui peut prêter à confusion, est entendu au sens moderne de la théorie du potentiel (cf par exemple l'article précité de H. CARTAN).

(13) Si μ est positive, le potentiel U^{μ} est défini en tout point. Dans le cas contraire on pose $\mu' = (\overset{+}{\mu})' - (\overline{\mu})'$, $\overset{+}{\mu}$ et $\overline{\mu}$ étant les variations positives et négatives de μ (bien entendu on envisagera seulement des mesures μ telles que $U^{\overset{+}{\mu}}$ et $U^{\overline{\mu}} \equiv\!\!\!/\, \infty$; d'ailleurs on n'aura à considérer que des mesures portées par E). En un point stable la relation $U^{\mu'} = U^{\mu}$ n'a de sens que si $U^{\overset{+}{\mu}}$ et $U^{\overline{\mu}}$ ne sont pas tous deux infinis, ce qui a lieu quasi partout (sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle).

(14) Généralisant une définition antérieure (G. CHOQUET et J. DENY, *Sur une propriété de moyenne*, etc., *Bull. Soc. Math. de France*, 52, 1944, p. 118-140) on peut appeler *normales pour* E les mesures (nécessairement portées par E) dont le potentiel est nul sur $\complement E = \Omega$; d'après un théorème établi dans l'article cité, pour que μ soit normale pour E, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à toute fonction harmonique sur un voisinage de E, c'est-à-dire qu'on ait $\int H d\mu = 0$ pour de telles fonctions. D'après le lemme 2, *b*, il suffit que ces relations soient vérifiées pour toutes les $\Phi_n^{a_p}$.

On appelle *extrémale* de la fonction $f \in \mathcal{C}$ la solution du problème de Dirichlet pour le compact E avec donnée frontière f; elle est définie en tout point x de E par :

$$K_f^E(x) = K_f(x) = \int f(y) d\varepsilon'_x(y),$$

où ε'_x est la mesure extrémisée de ε_x, masse $+1$ placée en x.

Lemme 2. — *Pour toute fonction continue $f \in \mathcal{C}$, et pour toute mesure μ, on a*

$$\int K_f d\mu = \int f d\mu' = \int K_f d\mu'.$$

En effet f est limite uniforme de potentiels continus U^λ, nuls hors d'un compact([15]). Le potentiel extrémisé $U^{\lambda'}$ étant donné par

$$U^{\lambda'}(x) = \int U^\lambda(y) d\varepsilon'_x(y),$$

il converge uniformément sur E vers l'extrémale de f (d'après les expressions intégrales de K_f et de $U^{\lambda'}$ on a en effet

$$|K_f - U^{\lambda'}| \leqslant |f - U^\lambda|,$$

la masse totale de la mesure positive ε'_x étant $\leqslant 1$). Les relations à démontrer sont alors des conséquences immédiates des formules de réciprocité bien connues([16]) :

$$\int U^{\lambda'} d\mu = \int U^\lambda d\mu' = \int U^{\lambda'} d\mu'.$$

Lemme 3. — *Soit $f \in \mathcal{C}$; pour que K_f soit continue sur* E, *il faut et il suffit que $K_f = f$ en tout point frontière instable.*

En effet, pour que K_f soit continue sur la frontière il faut et il suffit que $K_f = f$ en tout point frontière instable (puisque l'égalité a lieu en tous les points-frontières stables, et que ceux-ci sont denses sur la frontière). Il reste à montrer que si $K_f = f$ en un point-frontière instable x_0, K_f est continue sur E au point x_0 : or cela résulte du théorème suivant : lorsque le point x de E tend, d'une façon quel-

([15]) Lemme utilisé par H. Cartan : *Théorie du potentiel newtonien*, etc. (*Bull. Soc. Math. de France*, 72, 1945, p. 74-106).

([16]) Ces relations sont valables quelle que soit la mesure μ (différence de deux mesures positives de potentiel non identiquement infini), grâce aux hypothèses faites sur U^λ (continu, nul hors d'un compact).

conque, vers x_0, les valeurs limites de $K_f(x)$ sont comprises dans l'intervalle fermé $\big(f(x_0), K_f(x_0)\big)$ (17).

4. **Variété linéaire engendrée par les $\Phi_n^{a_p}$.**

On a désigné par $\mathcal{F}$ la variété linéaire fermée de $\mathcal{C}$ engendrée par les fonctions harmoniques élémentaires $\Phi_n^{a_p}$: appelons $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures portées par la frontière $\overset{*}{E}$ et dont l'extrémisée est nulle. Il est clair que $\mathcal{M}$ *constitue une variété linéaire faiblement fermée du dual topologique de l'espace vectoriel* $\mathcal{C}$ (18).

Théorème 2. — *$\mathcal{F}$ est identique au sous-espace de $\mathcal{C}$ orthogonal à la variété $\mathcal{M}$.*

D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que $\mathcal{M}$ est constituée par les μ orthogonales à $\mathcal{F}$ (19). Or pour que μ soit orthogonale à $\mathcal{F}$ il faut et il suffit que $\int \Phi_n^{a_p} d\mu = 0$ pour tous n et p (puisque $\mathcal{F}$ est engendrée par les $\Phi_n^{a_p}$) ; donc il faut et il suffit que μ soit d'extrémisée nulle (lemme 1, *b*).

Le résultat fondamental sur l'approximation des fonctions de $\mathcal{C}$ à l'aide des fonctions harmoniques au voisinage de E est un simple corollaire du théorème précédent :

Théorème 3. — *Pour que les $\Phi_n^{a_p}$ forment un système total sur $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que* E *n'ait pas de points-frontière instables.*

En effet il faut et il suffit que $\mathcal{M}$ se réduise à la mesure nulle, donc, d'après le lemme 1, *c*, que E n'ait pas de points-frontière instables.

Théorème 4. — *$\mathcal{F}$ est constituée par les fonctions de $\mathcal{C}$ dont l'extrémale est continue.*

(17) Ce théorème a été établi par O. Frostman (*Les points irréguliers dans la théorie du potentiel et le critère de* Wiener, *Kungl. Fys. Lund Förh.*, 9, 1939) dans le cas de la solution du problème de Dirichlet ordinaire (pour ouverts) au voisinage d'un point frontière irrégulier. Le cas présent (solution du problème de Dirichlet pour compacts) se traite de la même façon.

(18) $\mathcal{M}$ est évidemment une variété linéaire ; si d'autre part $\mu_n \in \mathcal{M}$ converge faiblement vers μ on a, sur Ω : $U^\mu = \lim U^{\mu_n} = 0$, d'où $\mu \in \mathcal{M}$ (lemme 1, *a*). Ce résultat n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du théorème *a* énoncé dans la note suivante.

(19) Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach (sur le corps des réels), V une variété linéaire fermée (au sens de la norme) de $\mathcal{B}$, dont les éléments sont notés x ; soit V′ l'ensemble des fonctionnelles linéaires y orthogonales aux éléments de $V\big(y(x) = 0$ pour tout $x \in V\big)$; on a les résultats suivants : *a*) V′ *est une variété linéaire faiblement fermée du dual de* $\mathcal{B}$ (évident) ; *b*) *si* $x_0 \in \mathcal{B}$ *est orthogonale à* V′ $\big(y(x_0) = 0$ *pour tout* $y \in V'\big)$, *on a* $x_0 \in V$ (démonstration facile par l'absurde, à l'aide du théorème de Hahn-Banach)

D'après le théorème 2 tout revient à établir l'identité des fonctions de $\mathcal{C}$ dont l'extrémale est continue, avec celles qui sont orthogonales à $\mathcal{M}$. Or si K_f est continue, $f = K_f$ sur $\overset{*}{E}$ (lemme 3), donc, pour toute $\mu \in \mathcal{M}$: $\int f d\mu = \int K_f d\mu = \int f d\mu'$ (lemme 2) ; comme μ' est nulle par hypothèse, f est bien orthogonale à $\mathcal{M}$. Soit inversement f une fonction de $\mathcal{C}$ qui soit orthogonale à $\mathcal{M}$; pour tout $x \in \overset{*}{E}$ on a $\varepsilon_x - \varepsilon'_x \in \mathcal{M}$, donc $\int f(d\varepsilon_x - d\varepsilon'_x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = K_f(x)$; le lemme 3 montre qu'alors K_f est continue.

5. **Cas où l'intérieur E_0 de E n'est pas vide.**

Désignons par $\mathcal{F}'$ le sous-espace de $\mathcal{C}$ constitué par les restrictions à $\overset{*}{E}$ des fonctions continues sur E tout entier et harmoniques dans E_0, et par $\mathcal{M}'$ la variété linéaire (faiblement fermée) du dual de $\mathcal{C}$, constituée par les mesures portées par $\overset{*}{E}$ et dont la balayée sur le complémentaire $\complement E_0$ est identiquement nulle.

Une étude toute semblable à celle qui a été faite pour la famille $\mathcal{F}$ montre que *$\mathcal{F}'$ est constituée par les fonctions de $\mathcal{C}$ qui sont orthogonales à $\mathcal{M}'$* [20]. De cette remarque on déduit aisément le :

Théorème 5. — *Pour que les variétés $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ coïncident, il faut et il suffit que les ensembles $\Omega = \complement E$ et $\complement E_0$ soient effilés aux mêmes points.*

En effet, d'après le théorème 2 et la remarque précédente, pour que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ coïncident il faut et il suffit que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$. Or il est clair que dans le cas général on a $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ [21] (d'où $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$), donc il faut et il suffit que toute μ portée par $\overset{*}{E}$ et extrémisée nulle soit de balayée nulle sur $\complement E_0$.

Pour cela il suffit évidemment que Ω et $\complement E_0$ soient effilés aux

(20) Dans les démonstrations on fera intervenir, au lieu des extrémales K_f, les fonctions de Wiener $H_f^{\complement E_0}(x) = H_f(x) = \int f(y) d\varepsilon''_x(y)$, où ε_x est la balayée sur $\complement E_0$ de $\varepsilon_x (x \in E)$. On a $\varepsilon''_x = \varepsilon_x$ pour tout x extérieur à E_0 ou point régulier de $\complement E_0$. On montre que $\mathcal{F}'$ est constituée par les fonctions continues f telles que H_f soit continue sur E (ou seulement, ce qui revient au même, sur la frontière de E_0).

(21) D'après la transitivité du balayage, l'extrémisée μ' d'une mesure μ (c'est-à-dire la balayée de μ sur Ω) peut s'obtenir en remplaçant μ par sa balayée sur $\complement E_0$ $\left(\text{puisque } \complement E_0 \supset \Omega\right)$. Si donc cette dernière balayée est nulle, on a $\mu' = 0$, ce qui montre bien que $\mathcal{M}'$ est contenue dans $\mathcal{M}$.

mêmes points [22], puisque les balayées d'une mesure quelconque sur ces deux ensembles sont identiques. Mais cette condition est également nécessaire, car s'il existait un point x irrégulier pour Ω et intérieur ou régulier pour $\complement E_0$, la mesure non nulle $\mu = \varepsilon_x - \varepsilon'_x$ serait d'extrémisée nulle, mais de balayée sur $\complement E_0$ non nulle, puisque cette balayée serait identique à μ [23].

6. Remarques sur un problème d'approximation faisant intervenir les dérivées des $\Phi_n^{a_p}$.

Nous supposerons maintenant que le compact E est *sans points intérieurs*. Désignons par $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des fonctions F définies et continûment différentiables dans un voisinage de E, deux fonctions prenant les mêmes valeurs sur E n'étant pas considérées comme distinctes. $\mathcal{C}_1$ constitue un espace vectoriel qu'on peut normer par exemple par

$$\|F\| = \operatorname*{Sup}_{x \in E} |F(x)| + \sum_{i=1}^{m} \operatorname*{Sup}_{x \in E} \left| \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \right|$$

$\mathcal{C}_1$ est *complet* et il est aisé de voir que son dual est constitué par les « distributions » de la forme :

$$T = \mu + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_i}$$

où μ et les μ_i sont des mesures portées par E.

Soit alors $\mathcal{F}_1$ la variété linéaire fermée de $\mathcal{C}_1$ engendrée par les fonctions harmoniques élémentaires $\Phi_n^{a_p}$. Il est intéressant de chercher des conditions nécessaires et suffisantes pour l'identité de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{F}_1$. Le théorème de Hahn-Banach permet de remplacer ce problème par le suivant : A quelles conditions doit satisfaire E pour que toute dis-

[22] Puisque Ω est contenu dans $\complement E_0$ tout point irrégulier de $\complement E_0$ est irrégulier pour Ω, mais on sait que la réciproque n'a pas toujours lieu.

[23] ε_x étant portée par un point régulier de $\complement E_0$ (par hypothèse), et ε'_x par l'ensemble des points stables de E (donc a fortiori réguliers pour $\complement E_0$), ces deux mesures coïncident avec leurs balayées sur $\complement E_0$.

[24] C'est-à-dire $T(\Phi_n^{a_p}) = 0$ pour tous n et p, ou encore, dans le cas présent :

$$\int \Phi_n^{a_p} d\mu - \sum_{i=1}^{m} \int \frac{\partial \Phi_n^{a_p}}{\partial x_i} d\mu_i = 0$$

tribution T de la forme précédente et orthogonale aux $\Phi_n^{a_p}$ (24) est-elle nulle? D'après la remarque finale du § 2 ceci peut encore s'énoncer : A quelles conditions la relation $U^T \equiv 0$ sur Ω entraîne $T \equiv 0$?

Ce problème semble assez difficile. Bornons-nous à signaler cette condition *suffisante* : Il existe un nombre α, $0 < \alpha < 1$, tel que Ω n'est effilé en aucun point-frontière pour le potentiel d'ordre α (potentiel pris par rapport au noyau $|x|^{\alpha - m}$) (25). Cette condition est trivialement vérifiée lorsque E est de mesure nulle.

Remarquons encore que, dans le cas $m = 2$, le problème suivant : « à quelles conditions les fonctions z^n et $(z - a_p)^{-n}$ forment-elles un système total dans l'espace des fonctions continues définies sur E et à valeurs complexes ? » (2) peut être mis sous une forme très voisine, à savoir : « à quelles conditions toute distribution de la forme $T = \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2}$, où μ_1 et μ_2 sont des mesures réelles portées par E, dont le potentiel logarithmique U^T est nul sur Ω, est-elle identiquement nulle ? ».

(25) Le principe de la démonstration est simple (on observe qu'en vertu des hypothèses sur T la formule de composition de M. Riesz permet d'identifier U^T avec un potentiel d'ordre α engendré par une *mesure*), mais celle-ci demande, surtout dans le cas de deux dimensions, une mise au point faisant appel à des propriétés délicates de la théorie des distributions, et sur laquelle je me propose de revenir dans un prochain travail.

(26) Rappelons que le résultat le plus précis obtenu dans cette voie est dû à M. Lavrentieff (*Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes*, *Act. Sc. et Ind.*, n° 441) : le système des z^n est total lorsque Ω est connexe.

(Manuscrit reçu en janvier 1950.)

COMPLÉMENTS A LA THÉORIE DE J. DENY

par Marcel BRELOT.

1. Nous allons essentiellement étendre la théorie précédente à l'espace rendu compact par adjonction d'un point à l'infini, le compact E de Deny pouvant alors contenir ce point à l'infini. Nous en profiterons pour apporter d'autres petits compléments, en soulignant l'intérêt qu'il y aurait à approfondir le cas où le potentiel de masses sur E serait supposé non pas nul sur $\complement$ E mais seulement

constant sur chacun des domaines composant $\complement E$. Par exemple, au moins si E est d'intérieur vide et assez régulier, le potentiel précédent sera encore nul sur $\complement E$; et il s'ensuivra que l'on peut alors, dans le système total de Deny (théorème 3) remplacer les $h(x - a_p)$ par une constante.

2. Conservons les notations de l'article précédent et, comme introduction, avec les hypothèses de Deny, signalons, vu l'importance de son théorème 1, *quelques autres démonstrations de ce théorème-clef*. On remarquera que le cas de a à l'infini peut se déduire par inversion du cas de a à distance finie où nous allons nous placer.

α) Pour x au voisinage de a et y sur E, $h(x - y)$ se développe selon

$$h(y - a) + \sum_{n=1}^{\infty} |x - a|^n |y - a|^{-(m-2+n)} Z_n^{x,y}$$

où Z_n polynome non nul par rapport au cos de l'angle des directions $x - a$, $y - a$ est, relativement à chacune de ces directions, une des fonctions de Laplace d'ordre n complètement définies à un facteur près par un axe de révolution sur l'autre direction. L'intégration en $d\mu_y$ donne U^μ et les conditions de Deny sont évidemment suffisantes. D'autre part, la nullité de U^μ au voisinage de a entraîne celle de $\int Z_n^{x,y} |y - a|^{-(m-2+n)} d\mu_y$ quelle que soit la direction $x - a$; comme toute fonction de Laplace d'ordre n est combinaison linéaire homogène de fonctions de même ordre de révolution [1], les conditions de Deny sont bien nécessaires.

On pourrait traiter de même directement le cas de a à l'infini.

β) Pour écrire que $\int h(x - y) d\mu_y$ est nul au voisinage de $x = a$, il n'y a qu'à annuler en a cette fonction et ses dérivées par rapport aux coordonnées de x. Mais remarquons que ces dérivées s'obtiennent en dérivant sous $\int$ et que les dérivées par rapport aux coordonnées de x, prises en a, de $h(x - y)$ sont aussi, au signe près, les dérivées de $h(a - y)$ par rapport aux coordonnées de y. Or ces dernières dérivées sont, pour l'ordre n, de la forme $\Phi_n^a(y)$ et l'on sait que tout Φ_n^a est combinaison linéaire homogène de ceux de

[1] Voir sur les polynomes harmoniques un mémoire à paraître en collaboration avec Choquet.

même ordre obtenus par n dérivations de $h(a-y)$, d'où le résultat.

γ) Tout potentiel U^ν de masses ν situées dans une boule $D_a^{r_0}(|x-a)| < r_0)$ admet pour $|x-a| > \rho > r_0$ un développement uniformément convergent $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^a(x)$. Réciproquement un Φ ou même un tel développement V uniformément convergent pour $|x-a| > \rho$ vaut pour $|x-a| > r > \rho$ un potentiel de masses ν situées dans $\overline{D}_a^r(|x-a| \leqslant r)$; en effet, modifions et prolongeons V selon W en prenant pour W dans $D_a^r(|x-a| < r)$ l'intégrale de Poisson relative à cette sphère et à la donnée-frontière V; alors W est localement différence de deux fonctions sousharmoniques car si on lui ajoute la fonction sousharmonique, nulle hors D_a^r égale dans D_a^r à $K[h(x-a)-h(r)]$ pour $K > 0$ assez grand, on obtient une fonction sousharmonique ([2]) au voisinage des points $|x-a| = r$. Prenons alors le potentiel U^ν des masses ν associées ([2 bis]) à W. On voit que $U^\nu - W$ harmonique dans R^m admet au voisinage de l'infini un développement de même type que V, donc est nul.

Or, la nullité de U^μ dans D (théorème 1) équivaut à la nullité de $\int U^\mu d\nu$ pour toutes les distributions de masses ν d'un voisinage fixé arbitrairement petit de a c'est-à-dire à $\int U^\nu d\mu = 0$. Ce qui précède montre alors l'équivalence avec les conditions de Deny.

On peut traiter directement de façon analogue le cas de a à l'infini.

3. Cette dernière méthode va se prêter facilement à l'extension de la théorie de Deny à l'espace compact $\overline{R}^m$ déduit de R^m par adjonction d'un point à l'infini noté $\mathcal{R}_m$.

Rappelons quelques notions fondamentales dans $\overline{R}^m$ ([3]): une fonction u définie dans Ω ouvert y est *sousharmonique* si elle est sousharmonique au sens classique hors $\mathcal{R}_m$ et si lorsque $\mathcal{R}_m \in \Omega$, elle est en $\mathcal{R}_m$, $\neq +\infty$, semi continue supérieurement et majorée par la

([2]) Car la fonction F ainsi obtenue est l'enveloppe supérieure des deux fonctions harmoniques obtenues par prolongement à travers la surface sphérique des fonctions harmoniques F considérées de chaque côté. Voir plus loin dans un cas plus général une variante de cette représentation potentielle de V.

([2 bis]) La connaissance de W détermine dans un voisinage ouvert ω de tout point la distribution de masses dont le potentiel y vaut W à une fonction harmonique près; on en déduit une mesure unique dans R^m (associée à W) qui coïncide dans chacun de ces ω avec la distribution correspondante précédente.

([3]) Voir sur cette introduction de $\mathcal{R}_m$ mon article des Annales de l'École N. S., 61, p. 301 (1944).

moyenne sur toute sphère de centre arbitraire contenue ainsi que son extérieur dans Ω.

Définition immédiate de la surharmonicité, L'*harmonicité*, obtenue par conjonction équivaut pour ce qui concerne $\mathcal{R}_m$ à ce que u y soit finie continue et, au voisinage, de la forme $K + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^a(x)$ ($a \neq \mathcal{R}_m$, quelconque).

Pour généraliser le potentiel, on introduit pour a, x, y de $\overline{R}^m$, x et y étant distincts de a, la fonction symétrique $h_a(x, y)$ de x, y définie comme suit :

1° si $a = \mathcal{R}_m$ $h_a(x, y) = h(x - y)$;
2° si $a \neq \mathcal{R}_m$ $h_a(x, y) = h(x - y) - h(x - a) - h(y - a)$ si x et y sont $\neq \mathcal{R}_m$,
$h_a(\mathcal{R}_m, y) = h_a(y, \mathcal{R}_m) = -h(y - a)$ si $y \neq \mathcal{R}_m$,
$h_a(\mathcal{R}_m, \mathcal{R}_m) = -h(\infty)$.

Si a et y sont $\neq \mathcal{R}_m$, $h_a(x, y)$ est harmonique de x au voisinage de $\mathcal{R}_m$. On notera que

$$\begin{aligned} h_a(x, y) - h_b(x, y) &= h_a(x, b) - h_b(a, y) \\ &= h_a(b, y) - h_b(x, a) \quad (x, y \text{ distincts de } a \text{ et } b). \end{aligned}$$

On saura alors définir hors a un *potentiel-h_a* noté U_a^μ (pour toute mesure μ pour laquelle $h_a(x, y_0)$ sera sommable-μ au voisinage de a) ; si $\mu \leqslant 0$, il est sousharmonique, et harmonique hors du noyau fermé des masses ; toute fonction sousharmonique dans un ouvert ω vaut localement, à une fonction harmonique près, un potentiel-h_a où a n'est pas adhérent à ω (la mesure associée étant unique). Si un domaine ω de frontière assez régulière contient le noyau fermé de masses μ et si a est extérieur à ω, le flux entrant $\int \frac{dU_a^\mu}{dn} ds$ vaut le produit de la masse totale par un coefficient φ_m (4).

Ajoutons une *notion* un peu *nouvelle* : une fonction u harmonique dans $\omega - a$ (ω ouvert contenant a) sera dite *d'allure potentielle en a*, si pour un $y_0 \neq a$ (et alors pour tout $y_0 \neq a$) u est hors a, dans un voisinage ouvert de a, la somme d'une fonction harmonique dans ce voisinage (a inclus) mais nulle en a, et de $Kh_a(x, y_0)$ (K C^{te} convenable). Cela signifie, si $a = \mathcal{R}_m$ (5) que u se développe à l'infini

(4) φ_m est le flux de $h(x)$ entrant dans D_O^r.
(5) Lorsque $m \geqslant 3$ c'est ce qu'on appelait, pour la fonction, la condition d'être *régulière et nulle* à l'infini.

selon $Kh(x-a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n^{a_0}(x)$ ($a_0 \neq \mathcal{R}_m$ quelconque) et si $a \neq \mathcal{R}_m$ que u est la somme de $-Kh(x-a)$ et d'une fonction tendant vers o quand $x \to a$.

D'après cela, grâce aux développements canoniques uniques des fonctions harmoniques, toute fonction harmonique dans $\overline{R}^m - a$, d'allure potentielle en a, est nulle.

Cette dénomination se justifie par le fait que tout potentiel-h_a de masses hors d'un voisinage de a est d'allure potentielle en a (avec le coefficient K égal à la masse totale) et que, réciproquement, toute fonction harmonique u dans $\omega - a$ d'allure potentielle en a est dans tout ω' ouvert ($\overline{\omega}' \subset \omega$) un potentiel-$h_a$ de masses situées hors ω'.

La première partie est facile. Pour la réciproque on introduira ω'_1 ouvert dont la frontière ne contienne pas $\mathcal{R}_m$ et tel que $\overline{\omega}' \subset \omega'_1 \subset \overline{\omega}'_1 \subset \omega$. On partira de u dans ω'_1 et on prolongera par exemple par une constante ; en faisant ensuite plusieurs médiations spatiales successives à rayon assez petit, on obtiendra une fonction v, localement différence de fonctions sousharmoniques dans $\overline{R}^m - a$ et égale à u dans ω' ; si ν est la mesure associée on voit que $U_a^\nu - v$ est harmonique dans $\overline{R}^m - a$ et d'allure potentielle en a donc nulle.

De cette réciproque résulte aisément que si a_0 est hors d'un ouvert ω, toute fonction harmonique dans ω vaut dans $\omega'(\overline{\omega}' \subset \omega)$ un potentiel-h_{a_0} de masses situées hors ω' et de total nul.

4. Extension du théorème 1.

THÉORÈME 1'. — *Soient μ une mesure sur un compact* E *de* $\overline{R}^m$, D *un domaine (non vide) du complémentaire* $\complement E$, $a \in D$ *et* $b \in \complement E$ $(a \neq b)$.

α) *Pour que* $U_a^\mu = C^{te}$ *dans* D, *ce qui entraîne aussitôt* $U_a^\mu = 0$ *dans* D, *il faut et suffit que* $\int V d\mu = 0$ *pour toute* V *harmonique dans* $\overline{R}^m - a$, *ou seulement du type ;* C^{te} *ou* $\Phi_n^a (n \geqslant 1)$.

β) *Pour que* $U_b^\mu = C^{te}$ *dans* D *il faut et suffit que* $\int V_1 d\mu$ *soit nul pour toute* V_1 *harmonique dans* $\overline{R}^m - a$ *et nulle en* b *ou seulement pour les* $\Phi_n^a - \Phi_n^a(b)$ $(n \geqslant 1)$.

Pour que $U_b^\mu = 0$ *dans* D, *il faut et suffit que la condition précédente soit réalisée et qu'en outre* $U_b^\mu(a) = 0$, *ou encore que* $\int W d\mu = 0$ *pour toute* W *harmonique dans* $\overline{R}^m - a - b$ *d'allure potentielle en* b.

La condition $U_a^\mu = 0$ dans D équivaut à $\int U_a^\mu d\nu = 0$ ou $\int U_a^\nu d\mu = 0$ quelle que soit ν chargeant un ouvert fixé de $D - a$ et admettant un U_a^ν. Comme toute V vaut sur E un potentiel-h_a de masses ν de ce type, il est nécessaire que $\int V d\mu = 0$. Réciproquement, partons de cette condition : si $a \neq \mathcal{R}_m$, un potentiel U_a^ν de masses ν situées dans un D_a^r assez petit se développe sur E en série uniformément convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^a(x) + C^{te}$ d'où $\int U_a^\nu d\mu = 0$. Raisonnement analogue si $a = \mathcal{R}_m$.

La condition $U_b^\mu = C^{te}$ dans D équivaut à $\int U_b^\mu d\nu = 0$ ou $\int U_b^\nu d\mu = 0$ quelle que soit ν chargeant un ouvert fixé de D (mais non b), de total nul et admettant un U_b^ν. V_1 valant un tel potentiel hors d'un voisinage de a, on trouve bien la condition nécessaire $\int V_1 d\mu = 0$. Réciproquement un tel potentiel U_b^ν se développe si $a \neq \mathcal{R}_m$ suivant $\sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_n^a(x) - \Phi_n^a(b)]$ d'où la suffisance. Raisonnement analogue si $a = \mathcal{R}_m$ et β s'achève sans difficulté.

Remarques. — Soit toujours μ *chargeant le compact* E *et soient* a, b *distincts dans* $\complement$ E.

α) *Si la masse totale est nulle* $U_a^\mu(x) - U_b^\mu(x) = U_a^\mu(b) = -U_b^\mu(a)$.

β) *La condition* $U_b^\mu = 0$ *dans* $\complement$ E *est indépendante de* b.

La condition que U_b^μ *est constante dans chacun des domaines composants* δ_i *de* $\complement$ E *est indépendante de* b *; elle équivaut à ce que, pour chaque* δ_i *le* U_a^μ *d'un point* a *de ce domaine soit nul dans ce domaine.*

Le théorème I' fournit des conditions équivalentes en choisissant un a dans chaque $\delta_i (a_0 \in \delta_0, \ldots a_i \in \delta_i \ldots)$ et dans δ_0 un b qui pourra coïncider avec a_0.

5. Ces conditions s'interprètent aussi très simplement par la théorie du balayage ou de l'*extrémisation* développée dans $\overline{R}^m$ (6) et dont on va rappeler quelques notions :

Si $\mu \leq 0$ charge le compact E, considérons $U_a^\mu (a \in \complement E)$. Il existe une fonction sousharmonique maxima égale à U_a^μ sur $\complement$ E (et qui ne dépend donc que de la valeur de U_a^μ sur $\complement$ E) ; c'est un potentiel

(6) Voir mon article du *J. de Math.*, 24 (1945).

U_a^ν dont $\nu \leqslant 0$ dite « mesure extrémisée relativement à E » est indépendante de a ; elle a même total de masses, ne charge que l'ensemble des points-frontière stables (points de la frontière $\overset{*}{E}$ où $\complement E$ n'est pas effilé) et $\mu = \nu$ si μ ne charge que cet ensemble.

On définit par différence l'extrémisation d'une mesure quelconque. On notera encore μ' l'extrémisée de μ et en particulier ε'_x l'extrémisée de la masse unité ε_x en $x \in E$.

Soit enfin $f \in \mathcal{C}$ (ensemble des fonctions finies continues sur $\overset{*}{E}$), F un prolongement borné continu et Ω_n un ouvert décroissant de limite E. La solution généralisée $H_F^{\Omega_n}$ du problème de Dirichlet a, sur E, une limite (indépendante du prolongement et de la suite Ω_n) soit K_f dite extrémale et valant $\int f d\varepsilon'_x$; on sait de plus que quelle que soit μ chargeant E : $\int K_f d\mu = \int f d\mu' = \int K_f d\mu'$ (ce qui contient le lemme 2) ; on pourra étendre le lemme 3 de Deny en montrant que la continuité de K_f sur E équivaut à $K_f = f$ sur $\overset{*}{E}$.

6. **Arrivons aux résultats essentiels de Deny en généralisant et complétant d'abord le lemme 1.**

La condition $U_b^\mu = 0$ dans $\complement E$ équivaut à $\mu' = 0$ ou $\mu = \lambda - \lambda'$, λ ne chargeant pas l'ensemble des points-frontière stables.

La condition que U_b^μ est constante dans chaque domaine composant δ_i de $\complement E$ équivaut à ce que μ soit d'extrémisée nulle relativement à chaque $\complement \delta_i$.

Soit $\mathcal{G}$ la variété linéaire fermée engendrée par les fonctions harmoniques dans $\overline{R}^m - a_i$ du type : constante ou $\Phi_n^{a_i} (n \geqslant 1)$.

Soit $\mathcal{F}$ la variété analogue engendrée par les $\Phi_n^{a_i} - \Phi_n^{a_i}(b)$ $(n \geqslant 1)$ ($b \in \complement E$ et distinct des a_i) et par les $h_b(a_i, x)$.

Soit $\mathcal{F}_p$ la variété engendrée par les $h_{a_p}(a_i, x)$ $(i \neq p)$, la C^{te} et par tous les $\Phi_n^{a_i} (n \geqslant 1)$.

Les raisonnements de Deny donnent alors :

Théorème 2'. — *$\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_p$ sont identiques au sous-espace de $\mathcal{C}$ orthogonal à la variété $\mathfrak{M}$ des mesures sur $\overset{*}{E}$ d'extrémisée nulle (relativement à E).*

Théorème 2''. — *$\mathcal{G}$, contenue dans $\mathcal{F}$, est identique au sous-espace de $\mathcal{C}$ orthogonal à la variété $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{M}$ des mesures sur $\overset{*}{E}$ dont les extrémisées relativss aux $\complement \delta_i$ sont toutes nulles.*

L'identité $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ équivaut à celle de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ *et aussi à ce que tout* U_b^μ (pour un b ou tout b de $\complement E$) *constant sur chaque* δ_i *soit nul sur* $\complement E$; *elle aura donc lieu si* $\complement E$ *est connexe* (7).

Enfin les théorèmes 3 et 4 se conservent sous la forme :

Pour que $\mathcal{F} \equiv \mathcal{C}$ *il faut et suffit que* E *n'ait pas de points-frontière instables.*

$\mathcal{F}$ *est formée des fonctions de* $\mathcal{C}$ *égales à leurs extrémales* (ou encore dont l'extrémale est continue).

Sans approfondir les conditions d'identité de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, signalons *que* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{G}$ *sont identiques à* $\mathcal{C}$ *lorsque* E *est d'intérieur vide, que les domaines composants* δ_i *sont en nombre fini, et que chacun n'est effilé en aucun de ses points-frontière.*

En effet soit dans ces conditions U_b^μ constant sur chaque δ_i ; s'il n'y était pas nul, soit Δ la partie de $\complement E$ où il serait nul, Δ_1 le reste. On verra que $\overset{*}{\Delta} \cap \overset{*}{\Delta}_1$ est non polaire, donc contient des points où U_b^μ est déterminé. L'existence d'une pseudo-limite en un tel point Q est incompatible avec le fait que Q est point-frontière d'un δ_i où $U_b^\mu = 0$ et d'un δ_j où $U_b^\mu \neq 0$, ces δ_i et δ_j n'étant pas effilés en Q.

Lorsque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont identiques à $\mathcal{C}$, on dispose donc pour $\mathcal{C}$ d'un système total plus simple : les $\Phi_n^{a_i} (n \geqslant 1)$ et la C[te].

Signalons seulement pour terminer qu'on pourrait faire des études intermédiaires entre celles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ et qu'on peut étendre à $\overline{R}^m$ l'étude complémentaire de Deny (n° 5 et théorème 5).

(Manuscrit reçu en mars 1950.)

(7) Ce cas est à rapprocher d'un résultat (corollaire 1 du théorème 2 de mon mémoire, *Bull. Soc. Math. de France*, 73, 1945) que l'on retrouve ici grâce au théorème 3 étendu.

ÉTUDE DES FONCTIONS SOUS-HARMONIQUES AU VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER

par Marcel BRELOT

I. — INTRODUCTION

1. Dans l'espace à $\tau \geqslant 2$ dim. et au voisinage d'un point singulier à distance finie ou à l'infini, les développements classiques d'une fonction *harmonique u* montrent aisément, comme on sait, en notant $\mathcal{M}_f^r(\mathrm{O})$ la moyenne d'une fonction f sur la circonférence ou sphère Σ_0^r de centre O et rayon r, que les limitations de croissance en *moyenne* du type : $r^\lambda \mathcal{M}_{u^+}^r(\mathrm{O})$ borné ou tendant vers 0 quand $r \to 0$ (cas du point singulier O à distance finie et $\lambda > \tau - 2$) ou quand $r \to \infty$ (point singulier à l'infini, O quelconque à distance finie et $\lambda > 0$) entraînent au moins les mêmes limitations *vraies* pour $|u|$ par disparition des termes du développement correspondant à une croissance plus rapide.

D'autre part, *pour u sous-harmonique*, il m'a été facile autrefois, d'obtenir quelques résultats généraux sur son allure au voisinage du point singulier, grâce au fait que $\mathcal{M}_u^r(\mathrm{O})$ est d'après F. Riesz fonction convexe de $h(r)$ avec

$$h(r) = \log 1/r \quad (\tau = 2) \qquad \text{ou} \qquad 1/r^{\tau-2} \quad (\tau > 2).$$

J'ai même approfondi le cas où u admet une *majorante harmonique* sur ce voisinage pointé, seul cas d'ailleurs où s'applique la représentation intégrale de F. Riesz à l'aide de la fonction de Green. On trouve alors, comme dans le cas harmonique, que des limitations de croissance en moyenne du type indiqué plus haut, sur la moyenne du u^+ entraînent les mêmes limitations vraies pour u^+ mais non plus pour $|u|$(1) ; cela pose la question pour u sans majo-

(1) Sur toute cette étude antérieure, dont on rappellera les premières notions aux

rante harmonique et le présent mémoire va y répondre en faisant presque entièrement l'extension.

On sait jusqu'ici peu de chose de plus ; cependant, en vue de perfectionner un point de la théorie des fonctions entières, M. Heins [2] a récemment établi le théorème suivant :

Soit $u(z)$ réelle sous-harmonique dans tout le plan (fini), harmonique au voisinage de l'origine O et d'ordre < 1, c'est-à-dire telle que pour un certain nombre $\rho (0 < \rho < 1)$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\max._{|z|=r} u(z)}{r^\rho} < +\infty.$$

Alors il existe une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ dans le plan telle que :

$$(1) \qquad u(z) = u(0) + \lim_{r \to \infty} \int_{D_0^r} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu_\zeta$$

(D_0^r domaine $|z| < r$).

Il n'est pas nécessaire, comme le fait remarquer l'auteur, que u soit harmonique au voisinage de l'origine ; un passage à la limite conserve la formule si l'on a seulement $u(0)$ fini.

De plus, comme je l'ai signalé dans une analyse de l'article de Heins (voir *Zentralblatt* 29, p. 298, 1948) la démonstration même de l'auteur, basée sur la représentation intégrale de F. Riesz permet d'améliorer l'énoncé. Ainsi, comme limitation de croissance de u, il suffit de supposer que $\mathfrak{M}_{u^+}^r / r \to 0 \ (r \to \infty)$; si même on suppose un peu plus, à savoir que $\mathfrak{M}_{u^+}^r / r^2$ est sommable en r au voisinage de l'infini [3], *ce qui a lieu dans le cas de Heins,* on peut remplacer dans (1) la limite de $\int_{D_0^r}$ par une vraie intégrale de Radon étendue à tout le plan ; car cette hypothèse entraîne la sommabilité en r [4] de $\mu(D_0^r)/r^2$, ce qui équivaut [5] à la sommabilité -μ de $1/|\zeta|$.

nos 12 et 14, voir essentiellement un fascicule des *Actualités scientifiques et industrielles* n° 139 (1934) noté (FAS) et un mémoire, qui sera noté (AN), des *Annales de l'École Normale supérieure,* t. 61, p. 301 (1944). Voir des extensions au voisinage d'un point-frontière irrégulier dans un article des *Annales de l'Université de Grenoble, section Sciences math. et phys.*, 22 (1946) p. 205.

(2) M. Heins, *Annals of Math.*, 49, p. 200 (1948).

(3) Cela entraîne bien que $\mathfrak{M}_{u^+}^r / r \to 0$ à cause de la croissance de $\mathfrak{M}_{u^+}^r$. Voir le lemme général 1 qui suit.

(4) En effet de (1), ou seulement de la représentation potentielle de toute fonction sous-harmonique, finie en O, dans $D_0^R (R > r)$ résulte :

$$\mathfrak{M}_u^r - u(0) = \int_{D_0^r} \log \left| \frac{r}{\zeta} \right| d\mu_\zeta \geqslant \log 2 - \mu(D_0^{r/2})$$

(voir aussi le lemne 4' C qui suit).

(5) Par une intégration par parties (voir le lemne 2' C qui suit).

2. D'autre part on voit aisément que la démonstration de Heins et la formule (1) s'appliquent encore si u, sous-harmonique pour $|z|$ assez grand, n'est ailleurs, au voisinage de chaque point, que, soit sous-harmonique, soit surharmonique [6] ; alors μ est de signe quelconque, mais $\geqslant 0$ au voisinage de l'infini.

Cela permet une étude de u donnée seulement sous-harmonique à l'extérieur d'un cercle de centre O, car en la modifiant au voisinage de la circonférence, on peut la *prolonger* dans tout le plan en une fonction du type précédent [7]. Il est alors immédiat que u, au voisinage de l'infini, est la somme d'une intégrale $\int \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\mu_\zeta$ étendue à l'extérieur d'un cercle (au sens d'une limite comme dans (1) ou au sens de Radon suivant les hypothèses de plus haut sur la restriction de croissance), d'un terme $K \log|z|$ et d'une fonction harmonique bornée au voisinage de l'infini. Une inversion donnerait dans le plan des résultats analogues au voisinage d'un point singulier. On songera alors à exploiter cette représentation intégrale. C'est ainsi que je montrerai, par exemple à l'infini, que l'hypothèse $\mathfrak{M}^r_{u^+}/r \to 0$ entraîne que $u^+(z)/|z| \to 0$ ($|z| \to \infty$), résultat partiel du type en vue.

3. En fait, poursuivant les études antérieures citées plus haut, nous allons aborder *directement*, sans artifice de prolongement de fonction, l'*étude locale la plus générale* ($\tau \geqslant 2$ et point singulier à distance finie ou à l'infini). Donnons une idée de la méthode, dans le cas de $\tau = 3$ et du voisinage de O singulier à distance finie ; rappelons que $\mathfrak{M}^r_u(O)$, $\mathfrak{M}^r_{u^+}$, $r\mathfrak{M}^r_u$, $r\mathfrak{M}^r_{u^+}$ ont des limites pour $r \to 0$, l'avant-dernière étant $> -\infty$; puis, que si $r\mathfrak{M}^r_{u^+}$ est borné ou tend vers 0, alors $OM \cdot u^+(M)$ et respectivement $u^+(M)$ sont bornés.

(6) Ou même, dans ce voisinage, presque partout finie et égale, là où elle est finie, à la différence de deux fonctions sous-harmoniques. On sait d'ailleurs que cette dernière propriété locale, dans l'espace à $\tau \geqslant 2$ dim. (même dans $\overline{R^\tau}$ cité plus loin) entraîne la même propriété globale pour tout ouvert Ω où la fonction est donnée (à condition que $\Omega \neq \overline{R^\tau}$). Voir C. R., t. 226, p. 1499. On s'appuiera, pour justifier l'affirmation du texte sur ce que, dans D^r_0, u admet encore la décomposition précise de F. Riesz, le second terme étant l'intégrale de Poisson relative à la donnée-frontière.

(7) Il n'y a qu'à remplacer u dans une couronne par la solution généralisée du problème de Dirichlet correspondant à une donnée égale à u sur la plus grande circonférence, et, sur la petite, à une constante majorant u sur les deux. On prolonge par cette constante à l'intérieur. La fonction obtenue est sous-harmonique au voisinage de la grande circonférence, surharmonique au voisinage de la petite. Cela s'adapte à l'espace et au prolongement analogue à un point singulier (à distance finie ou non) d'une fonction sous-harmonique avec modification dans un voisinage arbitrairement petit.

Supposons maintenant pour $s > 0$ que $r^s \mathfrak{M}_{u^+}^r$ soit sommable en r (au voisinage de 0) ce qui est un peu plus fort que $r^{1+s}\mathfrak{M}_{u^+}^r \to 0$ et soit p le premier entier $\geqslant 0$ majorant $s-1$ (ou plus grand entier $< s$). Observons que $1/\mathrm{MP}$ se développe pour M fixé $\neq$ O selon $\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{L}_n(\cos\gamma)\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}^n}{\overline{\mathrm{OM}}^{n+1}}$ $\left(\mathfrak{L}_n \text{ polynome de Legendre}, \quad \gamma = (\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})\right)$ avec convergence uniforme dans tout domaine sphérique de centre O et rayon $< \mathrm{OM}$.

Considérons, si μ est la mesure $\leqslant 0$ associée à u, l'intégrale de Radon :

$$v(\mathrm{M}) = \int \left[\frac{1}{\mathrm{MP}} - \sum_{n=0}^{p} \mathfrak{L}_n(\cos\gamma)\frac{\overline{\mathrm{OP}}^n}{\overline{\mathrm{OM}}^{n+1}}\right] d\mu_{\mathrm{P}}$$

Grâce à une étude de l'allure de μ selon la croissance de u (voir lemmes 2 et 4) on verra que cette intégrale existe bien, que $\overline{\mathrm{OM}}^{1+s} v^+(\mathrm{M}) \to 0$ avec OM et que $r^{1+s}\mathfrak{M}_{(u-v)^+}^r$ tend vers 0 avec r. De sorte que la fonction harmonique $u - v$ et même son module satisfont à la même limitation supérieure (le développement n'ayant que des termes satisfaisant à cette limitation de croissance). Grâce à *la représentation intégrale ainsi obtenue pour u et qui prolonge la représentation locale de Riesz, on pourra conclure que* $\overline{\mathrm{OM}}^{1+s} u^+(\mathrm{M}) \to 0$ avec OM ; et on aura des résultats analogues pour le cas général $\tau \geqslant 2$ (non sans quelque difficulté supplémentaire dans le plan), puis, soit par inversion, soit par un raisonnement direct similaire, pour la singularité à l'infini.

D'où cet *énoncé simple*, pour $\tau \geqslant 2$ et la singularité O par exemple à distance finie, que si $r^{\tau-2+s}\mathfrak{M}_{u^+}^r(\mathrm{O})$ $(s > 0)$ est borné au voisinage de O, alors $\overline{\mathrm{OM}}^{\tau-2+s+\varepsilon} u^+(\mathrm{M}) \to 0$ avec OM ($\varepsilon > 0$ quelc.).

On peut même voir, en perfectionnant ce qui précède, que pour s *non entier* > 0, si $r^{\tau-2+s}\mathfrak{M}_{u^+}^r$ est borné ou tend vers 0, $\overline{\mathrm{OM}}^{\tau-2+s} u^+(\mathrm{M})$ est respectivement borné ou tend vers 0 ; j'ai pu en faire l'extension au cas de $s = 1$ (on a déjà parlé plus haut du cas plan similaire à l'infini).

Ce résultat particulier plus précis pour $s = 1$ fera partie *d'une étude plus approfondie du cas simple* où $r^{\tau-1}\mathfrak{M}_{u^+}^r$ est borné ou tend vers 0 avec r s'il s'agit du voisinage d'une singularité à distance finie, ou bien $\mathfrak{M}_{u^+}^r/r$ est borné ou tend vers 0 avec $1/r$ s'il agit de la singularité à l'infini. On donnera dans ce cas de limite nulle une représentation globale prolongeant celle de Riesz avec fonction de

Green et dont se déduiront aussitôt le théorème de Heins amélioré et ses analogues dans l'espace et pour un point singulier à distance finie. Pour y parvenir, nous passerons à la limite, comme Heins, sur la représentation-décomposition de Riesz dans un domaine diminué d'un voisinage infiniment petit du point singulier. Mais il faudra introduire la plus petite majorante harmonique, non plus dans un cercle comme Heins, ce que la formule de Poisson rendait bien commode, par explicitation du noyau, mais dans une couronne, ce qui nécessitera une propriété nouvelle sur la dérivée normale de la fonction de Green, cas particulier d'un lemme intéressant en soi (lemme 6). Nous rencontrerons auxiliairement, d'ailleurs, diverses questions dignes d'intérêt, comme un résultat partiel (lemme 12) d'une étude qui serait à approfondir sur la convergence possible de la solution H_F^ω du problème de Dirichlet quand on fait tendre en croissant le domaine ω vers Ω, F étant une fonction définie au voisinage de la frontière de Ω.

Naturellement tout cela s'applique dans le plan aux $\log|f(z)|$ où $f(z)$ est localemant holomorphe et de module uniforme, ce qui donne des résultats nouveaux que nous nous dispenserons d'expliciter.

4. Nous allons nous placer en toute généralité dans l'espace $\overline{R^\tau}$ rendu compact par adjonction à l'espace enclidien R^τ à $\tau \geqslant 2$ dim., d'un point à l'infini $\mathcal{R}_\tau$ et nous utiliserons les notions d'harmonicité et sous-harmonicité au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$, données dans (AN). Précisons des notations en partie utilisées dans (AN), outre les symboles o et O de Landau :

1) $\overline{E}$, $\overset{*}{E}$ désignent l'*adhérence et la frontière de l'ensemble* E *dans* $\overline{R^\tau}$ et on notera de la même manière un point et l'ensemble qu'il forme.

2) D_0^r, Δ_0^r seront les domaines de R^τ définis par $OM < r$, $OM > r$; $\Delta_0'^r$ sera $\Delta_0^r \cup \mathcal{R}_\tau$, $C_0^{r, R}$ la couronne $r < OM < R$, Σ_0^r le lieu $OM = r$, σ_τ sa longueur ou aire pour $r = 1$.

3) $h(r)$ sera, on l'a dit, la fonction harmonique fondamentale, φ_τ le flux de $h(OM)$ à travers Σ_0^r entrant dans D_0^r et qui vaut 2π si $\tau = 2$, $(\tau - 2)\sigma_\tau$ si $\tau > 2$; rappelons que $\mathfrak{M}_u^r(O)$ est la moyenne de u sur Σ_0^r, et $H_f^\Omega(M)$ la fonction de Wiener (solution du problème de Dirichlet généralisé) pour l'ouvert Ω et la donnée-frontière f.

II. QUELQUES LEMMES ET RÉSULTATS CONNEXES

5. Quelques propriétés des mesures de Radon au voisinage d'un point, ce point exclu.

Remarque préliminaire (Choquet). — Soit $\varphi(t)$ finie >0 croissante ou décroissante dans l'intervalle I : $]0, t_0[$ et tendant vers 0 ou $+\infty$ quand $t \to 0$. Alors $\int_I \frac{d\varphi}{\varphi} = \pm\infty$. Même résultat en prenant pour I, $]t_0, +\infty[$, φ tendant vers 0 ou $+\infty$ quand $t \to +\infty$.

Prenons par exemple le 1^er^ cas avec φ croissante et $\to 0$ et introduisons en t les lim φ^+ et φ^- à droite et à gauche.

a) Si $\liminf\limits_{t \to 0} \frac{\varphi^-(t)}{\varphi^+(t)} = 0$, soit t_n décroissante $\to 0$ telle que $\frac{\varphi^-(t_n)}{\varphi^+(t_n)} < \frac{1}{2}$; alors

$$\frac{\varphi^+(t_n) - \varphi^-(t_n)}{\varphi(t_n)} \geqslant \frac{\varphi^+(t_n) - \varphi^-(t_n)}{\varphi^+(t_n)} \geqslant \frac{1}{2}$$

d'où

$$\int_I \frac{d\varphi}{\varphi} \geqslant \sum_1^\infty \frac{\varphi^+(t_n) - \varphi^-(t_n)}{\varphi(t_n)} = +\infty.$$

b) Sinon, dans un intervalle $]0, t_1[$, $\frac{\varphi^-}{\varphi^+} \geqslant \varepsilon > 0$. On construira facilement dans cet intervalle une fonction finie continue $\psi > 0$ même continuement dérivable, majorant φ et telle que $\frac{\psi}{\varphi} < \frac{K}{\varepsilon}$ $(K > 1)$.

Or
$$\int_{]t, t_1[} \frac{d\varphi}{\varphi} \geqslant \int_{]t, t_1[} \frac{d\varphi}{\psi} = \frac{\varphi^-(t_1)}{\psi(t_1)} - \frac{\varphi^+(t_1)}{\psi(t)} + \int_t^{t_1} \varphi \frac{\psi'}{\psi^2} dt$$

et la dernière intégrale majore $\frac{1}{K} \log \frac{\psi(t_1)}{\psi(t)}$ d'où le résultat.

Démonstrations analogues dans les autres cas.

Lemme 1. — *Soit dans l'intervalle* $]0, t_0]$ *noté* I, $f(t)$ *et* $\varphi(t)$ *finies, l'une quelconque continue, l'autre continue d'un côté ; chacune est* $\geqslant 0$ *ou* $\leqslant 0$, *croissante ou décroissante et quand* $t \to 0$, $|\varphi|$ *tend vers* 0 *ou* $+\infty$ *ou bien* $f \to 0$; *enfin* $\int_I f d\varphi$ *est supposée finie. Alors* $\int_I \varphi df$ *est finie et* $f\varphi \to 0$ *pour* $t \to 0$.

Même énoncé en prenant pour I *l'intervalle* $[t_0, +\infty[$ *et faisant tendre* t *vers* $+\infty$.

Dans le premier cas, par exemple, intégrons sur l'intervalle J égal $]t, t_0]$ ou $[t, t_0]$ selon qu'il y a pour les deux fonctions continuité à droite ou à gauche :

$$(2) \qquad \int_J f d\varphi + \int_J \varphi df = \int_J df\varphi = f(t_0)\varphi(t_0) - f(t)\varphi(t).$$

Supposons que $|\varphi|$ tende vers o ou $+\infty$. Voyons que $f\varphi$ reste borné. Sinon $\int_J \varphi df$ ne serait pas borné et tendrait vers $+\infty$ ou $-\infty$. Par suite $|f\varphi| \to +\infty$ d'où pour $t < t_1$ convenable $|f| \geqslant \frac{K}{|\varphi|}$. Alors si par exemple φ est croissante

$$\left|\int_{]t, t_1[} f d\varphi\right| = \int_{]t, t_1[} |f| d\varphi \geqslant K \int_{]t, t_1[} \frac{d\varphi}{|\varphi|} \quad \text{d'où} \quad \left|\int_J f d\varphi\right| \to +\infty$$

et de même si φ est décroissante.

On conclut que $f\varphi$ reste borné, donc aussi $\int_J \varphi df$ qui aura par suite une limite finie. Alors $f\varphi$ aura une limite finie, cette limite sera nulle, sinon $|f\varphi|$ majorerait pour t assez petit un nombre $K > o$ et le raisonnement précédent par contradiction s'appliquerait à nouveau.

Supposons maintenant que $f \to o$. Ou bien $|\varphi| \to +\infty$ et nous serons dans le cas précédent, ou bien $|\varphi|$ est borné et l'égalité (2) montre que $\int_I \varphi df$ est finie, puis, en appliquant la première partie avec f et φ permutés, que $f\varphi \to o$.

Raisonnement tout analogue pour le second énoncé.

Lemme 2. — *Soit dans* $R^\tau - O$ (O *point* $\neq \mathcal{R}_\tau$) *une mesure* $\mu \geqslant o$ *nulle hors d'un compact de* R^τ *puis* α *et* λ $C^{tes} > o$ *et* r *variable au voisinage de* o.

A) *Supposons que* $\mu(\Delta_O^r) = O(r^{-\alpha})$. *Alors* $\overline{OP}^{\alpha+\lambda}$ *est sommable* -μ_P et

$$\int_{D_O^r - O} \overline{OP}^{\alpha+\lambda} d\mu_P = O(r^\lambda), \qquad \int_{\Delta_O^r} \overline{OP}^{\alpha-\lambda} d\mu = O(r^{-\lambda}),$$

$$\int_{\Delta_O^r} \overline{OP}^{\alpha} d\mu = O(\log r),$$

enfin pour M *variable dans* $\Delta_O^{Kr}(K, C^{te} > o)$, $\int_{\Delta_O^r} \log\frac{MP}{MO} d\mu_P$ *est majoré par un* $O(r^{-\alpha})$ *indépendant de* M.

B) *Si* $\mu(\Delta_0^r) = o(r^{-\alpha})$ $(r \to 0)$ *les quatre derniers résultats s'étendent avec des* o *au lieu de* O.

C) *La sommabilité en* r *de* $r^{\alpha-1}\mu(\Delta_0^r)$ *entraîne l'hypothèse* B *et équivaut à la sommabilité* $-\mu_P$ *de* $\overline{OP}^{\alpha}$.

On passera des intégrales de fonctions de la distance à O à des intégrales de Stieltjes à une variable qui se prêteront à une intégration par parties. Ainsi C résultera du lemme précédent ; A et B se traiteront directement ; insistons sur leur dernière propriété. Rabattons autour de O le point P et la mesure μ sur la demi-droite issue de O opposée à celle qui contient M. On obtient ainsi P_1 et la mesure linéaire μ_1 et l'on voit que si $\varphi(x) = \mu_1(]x, +\infty[)$, d'ailleurs O ou o de x^{-s}, on a $MP \leqslant MP_1$,

$$\int_{\Delta_0^r} \log \frac{MP}{MO}\, d\mu_P \leqslant \int_{\Delta_0^r} \log \frac{MP_1}{MO}\, d\mu_1 \leqslant -\int_{]r, +\infty[} \log \frac{Kr+x}{Kr}\, d\varphi.$$

Cette dernière expression devient par intégration par parties

$$\log \frac{K+1}{K} \varphi(r) + \int_{]r, +\infty[} \frac{\varphi(x)}{Kr+x}\, dx$$

où cette intégrale, qui se majore en remplaçant $\frac{\varphi}{Kr+x}$ par $\frac{\varphi}{x}$ est bien, avec $\varphi(r)$, un O ou un o de r^{-s}.

Par inversion ou par des raisonnements directs analogues on obtient :

Lemme 2'. — *Soit dans* R^{τ} *une mesure* $\mu \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, O *point fixé*, $r > 0$ *variable.*

A) *Si* $\mu(D_0^r) = O(r^{\alpha})(r \to \infty)$, $\overline{OP}^{-\alpha-\lambda}$ *est sommable*-μ_P *au voisinage de* $\mathfrak{R}_{\tau}$ *et pour* $r \to \infty$

$$\int_{\Delta_0^r} \overline{OP}^{-\alpha-\lambda} d\mu = O(r^{-\lambda}), \quad \int_{D_0^r} \overline{OP}^{-\alpha+\lambda} d\mu = O(r^{\lambda}),$$

$$\int_{D_0^r} \overline{OM}^{-\alpha} d\mu = O(\log r),$$

enfin, pour M *variable dans* D_0^{Kr}, $\int_{D_0^r} \log \frac{MP}{MO}\, d\mu_P$ *est majoré par un* $O(r^{\alpha})$ *indépendant de* M.

B) *Si* $\mu(D_0^r) = o(r^{\alpha})$ $(r \to \infty)$ *ces quatre dernières propriétés sont valables avec des* o.

C) *La sommabilité de* $r^{-\alpha-1}\mu(D_0^r)$ *en* r *voisin de l'infini, entraîne l'hypothèse* B *et équivaut à la sommabilité*-μ *de* $\overline{OP}^{\alpha}$ *au voisinage de* $\mathfrak{R}_{\tau}$.

D) *Les hypothèses* A, B, C *sont invariantes par rapport au point* O, ce qui résulte de

$$D_O^r \subset D_{O_1}^{r+OO_1} \subset D_O^{r+2OO_1}$$

et des inégalités correspondantes pour les mesures.

Lemme 3. — *Soit* y *convexe dans* $]t_0, +\infty[$.

A) *Si elle est décroissante pour* t *assez grand,* y/t *et* $y'^{\pm}$ *ont une même limite pour* $t \to +\infty$ *de sorte que* $ye^{-Kt}(K>0)$, $yt^{-\alpha-1}(\alpha>0)$, $y'^{\pm}e^{-Kt}$ *et* $y'^{\pm}t^{-\alpha}$ *tendent vers* o.

B) *Sinon elle est croissante et* >0 *pour* t *assez grand et* ye^{-Kt}, $yt^{-\alpha-1}$ *ont séparément une lim. sup. finie ou nulle en même temps respectivement que* $y'^{\pm}e^{-Kt}$ *ou* $y'^{\pm}t^{-\alpha}$.

Dans le cas B une hypothèse avec y' entraîne la propriété correspondant avec y de manière banale (type de la règle de l'Hospital). Pour conclure dans l'autre sens, on remarque que

$$y'^{\pm}(t) \leqslant \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \leqslant \frac{y(t+h)}{h} \quad (h>0)$$

d'où en faisant $h=C^{te}$ ou $h=t$, des inégalités fournissant les énoncés.

Lemme 3'. — *Soit* y *convexe dans* $]0, t_0[$.

A) *Si* y *est d'abord croissante,* y *et* $y'^{\pm}$ *ont des limites finies pour pour* $t \to 0$ *et* yt^{α}, $y'^{\pm}t^{\alpha+1}(\alpha>0)$ *tendent vers* o.

B) *Sinon* y *est d'abord décroissante,* yt^{α} *et* $-y'^{\pm}t^{\alpha+1}$ *ont des lim. inf.* $\geqslant 0$ *et ont des lim. sup. simultanément finies ou nulles.*

Démonstration analogue.

Applications. — Soit u sous-harmonique dans $C_O^{R_1,R_2}$. En prenant comme variable $t=h(r)$ posons $y(t)=\mathfrak{M}_u^r(O)(R_1<r<R_2)$. On sait (8) que y est convexe et que si μ est la mesure $\leqslant 0$ associée à u

$$\mu(C_O^{r_1,r_2}) = y_t'^{-}(t_2) - y_t'^{+}(t_1).$$

(8) F. Riesz a défini à travers une surface (ou courbe) comme Σ_O^R, quatre flux généralisés selon le côté d'approximation et l'orientation de la normale. Ainsi le flux par l'intérieur avec l'orientation vers l'intérieur est la limite pour $r \to R (r<R)$ du flux de $H_u^\delta(M)$ (δ étant $C_O^{r,R}$) à travers $\Sigma_O^\rho (r<\rho<R)$ quand on oriente la normale vers o. La masse totale portée par le domaine entre deux telles surfaces par exemple entre Σ_O^R et $\Sigma_{O_1}^{R_1}(\bar{D}_{O_1}^{R_1} \subset D_O^R)$ vaut le quotient par φ_τ de la somme des flux précédents pris du côté du domaine avec orientation vers le domaine. D'autre part les $y_t'^{\pm}$ valent le quotient par φ_τ des flux à travers Σ_O^r pour l'orientation dans le sens de r décroissant (voir FAS).

Rappelons d'ailleurs [9] que pour toute mesure de Radon $\leqslant 0$ dans un ouvert Ω (même de $\overline{R^\tau}$ mais alors différent de $\overline{R^\tau}$), il existe une fonction sous-harmonique dans Ω dont la mesure associée est cette mesure.

Lemme 4. — *Soit u harmonique dans* $D_O^{R_0} - O$, *de mesure associée* μ,

$$0 < r \text{ variable} < R \text{ fixé} < R_0, \qquad \alpha,\ C^{te} > 0.$$

A) $r^{\tau-2+\alpha}\mathfrak{M}_u^r$, *toujours bornée inférieurement est bornée supérieurement si et seulement si* $r^\alpha \mu(C_O^{r,R})$ *est borné.*

B) $r^{\tau-2+\alpha}\mathfrak{M}_u^r$ *toujours de lim. inf.* $\geqslant 0$ *pour* $r \to 0$, *tend vers* 0 *avec r si et seulement si* $r^\alpha \mu(C_O^{r,R}) \to 0$.

C) *La sommabilité en r de* $r^{\tau-3+\alpha}\mathfrak{M}_u^r$, *qui entraîne l'hypothèse* B, *équivaut à celle de* $r^{\alpha-1}\mu(C_O^{r,R})$.

Il n'y a qu'à passer à la variable t et appliquer les lemmes 1 et 3.

Par inversion [10] ou par des raisonnements directs analogues on obtient :

Lemme 4'. — *Soit u sous-harmonique dans* $\Delta_O^{R_0}$, *de mesure associée* μ, r *variable* $> R$ *fixé* $> R_0$, α $C^{te} > 0$.

A) $r^{-\alpha}\mathfrak{M}_u^r(O)$ *toujours borné inférieurement est borné supérieurement si et seulement si* $r^{-(\tau-2+\alpha)}\mu(C_O^{R,r})$ *est borné.*

B) $r^{-\alpha}\mathfrak{M}_u^r(O)$ *toujours de lim. inf.* $\geqslant 0$ *pour* $r \to \infty$, *tend vers* 0 *si et seulement si* $r^{-(\tau-2+\alpha)}\mu(C_O^{R,r}) \to 0$.

C) *La sommabilité en r au voisinage de l'infini de* $r^{-(1+\alpha)}\mathfrak{M}_u^r(O)$ *qui entraîne l'hypothèse* B, *équivaut à la sommabilité de*

$$r^{-(\tau-1+\alpha)}\mu(C_O^{R,r}).$$

Ajoutons :

D) *Pour u sous-harmonique au voisinage de* $\mathcal{R}_\tau$, *ce point exclu, les propriétés* A, B, C *pour* $r \to \infty$ *sont invariantes en* O, *comme dans le lemme 2', par équivalence avec les propriétés correspondantes de* μ.

(9) Voir la note aux C. R. déjà citée note (6).

(10) Dans l'inversion $OM \cdot OM' = 1$, à $v(M)$ sous-harmonique de mesure associée μ correspond $w(M') = \dfrac{w(M)}{\overline{OM'}^{\tau-2}}$ sous-harmonique en M' et la mesure associée ν à w est telle que :

$$\nu(e') = \int_e \frac{d\mu_M}{\overline{OM}^{\tau-2}}, \qquad (e,\ e' \text{ inverses}).$$

7. Une propriété de la dérivée normale d'une fonction harmonique à la frontière.

Lemme 5. — *Soit dans le domaine* C_0^{r, r_0} $(0 < r \text{ variable} \leqslant \rho < r_0)$ *une fonction harmonique* u *venant s'annuler sur* Σ_0^r *et prenant sur* $\Sigma_0^{r_0}$ *des valeurs bornées en module par* K *et de moyenne nulle. Alors la dérivée normale* $\frac{du}{dn}$ *à* Σ_0^r *est en module bornée par une constante qui ne dépend que de* r_0, ρ *et* K (*pour* τ *fixé*).

En effet, si $1 < \alpha < \frac{r_0}{\rho}$ $\left(\text{par exemple } \alpha = \sqrt{\frac{r_0}{\rho}}\right)$ la fonction $v = H_u^{D_0^{r_0}}$ admet dans $\overline{D}_0^{\alpha\rho}$ un gradient borné indépendamment de u (¹¹) et puisqu'elle s'annule en O, elle est sur $\Sigma_0^{r'}(r' \leqslant \alpha\rho)$ majorée en module par $\lambda_{r'}$ où λ ne dépend que de r_0, ρ, α et K.

Donc la solution w du problème de Dirichlet dans C_0^{r, r_0} pour une donnée, nulle sur $\Sigma_0^{r_0}$, égale à v sur Σ_0^r est majorée en module par λr sur $\Sigma_0^{\alpha r}$. Par suite $|u|$ égal à $|v - w|$ est majoré sur $\Sigma_0^{\alpha r}$ par $\lambda(1 + \alpha)r$. Or u s'annulant sur Σ_0^r se prolonge harmoniquement au travers et devient une fonction harmonique dans la couronne $C_0^{r/\alpha, \alpha r}$; le prolongement, d'ailleurs, en M′ symétrique de M par rapport à $\Sigma_0^r(\text{OM} . \text{OM}' = r^2)$ vaut $-u(\text{M})\left(\frac{\text{OM}}{r}\right)^{\tau - 2}$ (¹²).

De sorte que la fonction obtenue dans $C_0^{r/\alpha, \alpha r}$ y est majorée en module par $\lambda(1 + \alpha)r\alpha^{\tau-2}$. Sur Σ_0^r qui est à distance $\frac{\alpha - 1}{\alpha} r$ de la frontière de cette couronne, le gradient de u est donc majoré en module par $\lambda \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \alpha^{\tau-1}\tau$.

Lemme 5′. — *Soit dans* $C_0^{r_0, r}$ $(r \geqslant \rho > r_0)$ *une fonction harmonique* u *venant s'annuler sur* Σ_0^r *et prenant sur* $\Sigma_0^{r_0}$ *des valeurs bornées en*

(¹¹) On sait que le gradient en O d'une fonction harmonique dans D_0^δ de R^τ, comprise entre A et B (A $\leqslant$ B) est en module majoré par $\frac{v_{\tau-1}}{v_\tau}\frac{B - A}{\delta}$ (v_τ étant le volume de D_0^1), où $\frac{v_{\tau-1}}{v_\tau}$ est $< \frac{\tau}{2}$.

(¹²) On sait que le prolongement est possible puisque par transformation de Kelvin on se ramène localement au cas simple de la fonction s'annulant sur une portion de plan (droite). Il n'y a alors qu'à remarquer que $u(\text{M})$ et $w(\text{M}') = -u(\text{M})\left(\frac{r}{\text{OM}'}\right)^{\tau-2}$ ont même dérivée normale le long de Σ_0^r.

module par K *et de moyenne nulle. Alors la dérivée normale* $\frac{du}{dn}$ *à* Σ_0^r *est en module majorée par* $\lambda_0 r^{-\tau}$, *où la constante* λ_0 *ne dépend que de* $r_0 \rho$ *et* K (*pour* τ *fixé*).

Cela résulte du lemme précédent par inversion.

Lemme 6. — *Soit dans* $C_0^{r, r_0}(r \leqslant \rho < r_0)$ *une fonction harmonique* u *bornée en module par* K *et venant s'annuler sur* Σ_0^r. *Alors la différence des dérivées normales* (*vers l'intérieur du domaine par exemple*) *en deux points quelconques de* Σ_0^r *est en module majorée par un nombre* λ_1 *qui ne dépend que de* $r_0 \rho$ *et* K (τ *fixé*).

De même, pour u *harmonique dans* $C_0^{r_0, r}(r \geqslant \rho > r_0)$, *bornée en module par* K *et s'annulant sur* Σ_0^r, *la différence des dérivées normales* (*vers le domaine*) *en deux points quelconques de* Σ_0^r *est en module majorée par* $\lambda_2 r^{-\tau}$ *où la constante* λ_2 *ne dépend que de* $r_0 \rho$ *et* K.

La première partie résulte du lemme 5 en considérant

$$C_0^{r, r'_0}(\rho < r'_0 < r_0)$$

et retranchant de u la fonction de Wiener pour cette couronne, une donnée nulle sur Σ_0^r et égale à $\mathfrak{M}_u^{r'_0}(O)$ sur $\Sigma_0^{r'_0}$. De même pour la seconde partie à partir du lemme 5'.

Cas particulier. Lemme 7. — *Soit* Ω *un domaine de complémentaire non polaire, c'est-à-dire admettant une fonction de Green* $G_\Omega(M, P)$[13]. *Otons-en le voisinage assez petit* $\overline{D}_0^r$ *d'un point* $O \neq \mathcal{R}_\tau (O \in \Omega)$. *Alors pour le nouveau domaine* ω, *la différence entre le maximum et le minimum* (*tous deux* > 0) *de* $\frac{dG_\omega}{dn}(M, P)$ (P *fixé dans* Ω, $P \neq O$, M *décrivant* Σ_0^r) *vers l'intérieur de* ω, *reste majorée en module par une constante* q *pour* r *variable assez petit.*

De même, si $\mathcal{R}_\tau \in \Omega$, *otons de* Ω *un* $\overline{\Delta}_0^r$, O *étant fixé quelconque. Pour le nouveau domaine* ω, *la différence entre le maximum et le minimum* (*tous deux* > 0) *de* $\frac{dG_\omega}{dn}(M, P)$ (P *fixé dans* Ω, $P \neq \mathcal{R}_\tau$,

(13) On sait qu'un ensemble est dit *polaire* s'il est, localement, contenu dans l'ensemble des points où une fonction sous-harmonique vaut $-\infty$. On peut montrer que la non polarité de $C\Omega$ (complémentaire dans $\overline{R}^\tau$) équivaut à l'*existence* de fonctions > 0 harmoniques dans $\Omega - P$ (P quelconque dans Ω), de flux φ_τ en P (c'est-à-dire à travers Σ_P^r vers P si $P \neq \mathcal{R}_\tau$, à travers Σ_0^r vers Δ_0^r si $P = \mathcal{R}_\tau$). Cette existence entraîne celle d'une *fonction* minima de ce type, alors identique à la fonction de Green de pôle P, définissable de diverses manières. Ces résultats faciles à déduire de (A.\) ne semblent pas avoir été encore explicités.

M *décrivant* Σ_0^r) *vers l'intérieur de* ω, *reste majorée en module par* $q' r^{-\tau}$ ($q' = C^{te}$) *quand* r *variable est assez grand.*

APPLICATION. LEMME 8. — *Avec ces mêmes notations, soit sur* Σ_0^r *une fonction* f *sommable-*σ *donc telle* ([14]) *que la fonction* $(f, 0)$ *sur* $\overset{*}{\omega}$ (*égale à* f *sur* Σ_0^r, *à* 0 *ailleurs*) *soit résolutive pour* ω ; *alors* $|H^{\omega}_{(f, 0)}(M) - H^{\omega}_{(\mathfrak{M}_f^r, 0)}(M)|$ *est majoré par* $K_1 r^{\tau-1} \mathfrak{M}^r_{|f|}$ (1^er^ cas) *ou par* $\dfrac{K_2}{r} \mathfrak{M}^r_{|f|}$ (second cas) (K_1, K_2 *constantes*), *pour* r *assez petit ou assez grand, uniformément en* M *pris hors d'un voisinage de* O *ou respectivement de* $\mathcal{R}_\tau$.

En effet $H^{\omega}_{(f^+, 0)}(M)$ et $H^{\omega}_{(\mathfrak{M}^r_{f^+}, 0)}(M)$ sont compris entre les produits de $\dfrac{\sigma_\tau}{\varphi_\tau} r^{\tau-1} \mathfrak{M}^r_{f^+}(O)$ par le min. et le max. de $\dfrac{dG_\omega}{dn_P}$ sur Σ_0^r. De sorte que la différence est en module majorée par $q \dfrac{\sigma_\tau}{\varphi_\tau} r^{\tau-1} \mathfrak{M}^r_{f^+}(O)$ (1^er^ cas) ou $q' \dfrac{\sigma_\tau}{\varphi_\tau} \dfrac{1}{r} \mathfrak{M}^r_{f^+}(O)$ (2^e^ cas).

Même résultat avec f^- d'où l'énoncé.

Remarque. Extension des lemmes 7 et 8. — Les résultats se conservent avec des constantes convenables si Ω est variable mais contenu dans un domaine fixe analogue et contenant un voisinage fixe de O (1^er^ cas) ou de $\mathcal{R}_\tau$ (2^e^ cas).

8. Le « centre harmonique » d'un ensemble borné fermé.

Beaucoup plus généralement qu'il ne serait utile pour la suite, considérons l'ensemble E borné fermé pour $\tau \geqslant 2$. On sait qu'il existe sur E une distribution unique $\geqslant 0$ de la masse 1 telle que le potentiel en $h(r)$ soit borné au voisinage de E et vaille sur E une certaine constante K quasi-partout (c'est-à-dire à l'exception d'un ensemble polaire). Soit ν cette « distribution d'équilibre » et V son potentiel.

On appellera *centre harmonique* de E le centre de gravité de ν.

Prenons une origine O ; on connaît le développement classique :

$$\frac{1}{MP} = \frac{1}{OP}\left[1 + \frac{OM \cos(OM, OP)}{OP} + \cdots\right]$$

([14]) Par exemple, parce que la mesure harmonique sur Σ_0^r relativement à ω est l'intégrale de $\dfrac{dG}{dn}$, comprise entre deux nombres > 0. Voir plus généralement le lemme 10.

en série entière en $\frac{1}{\mathrm{OP}}$ à coefficients fonctions de OM et du cos (OM, OP) avec convergence uniforme en M et P (OM borné, OP assez grand). De même ou à partir de là des séries connues analogues

$$\log \frac{1}{\mathrm{MP}} = \log \frac{1}{\mathrm{OP}} + \frac{\mathrm{OM}\cos(\mathrm{OM},\ \mathrm{OP})}{\mathrm{OP}} + \cdots$$

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{MP}}^{\tau-2}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{OP}}^{\tau-2}} + \frac{(\tau-2)\mathrm{OM}\cos(\mathrm{OM},\ \mathrm{OP})}{\overline{\mathrm{OP}}^{\tau-1}} + \cdots \quad \tau > 2.$$

D'après cela, pour que $[\mathrm{V(P)} - h(\mathrm{OP})]\overline{\mathrm{OP}}^{\tau}$ soit borné au voisinage de $\mathcal{R}_\tau(\mathrm{P} \neq \mathcal{R}_\tau)$, il faut et il suffit que O soit le centre harmonique de E.

LEMME 9. — *Soit dans* $\overline{\mathrm{R}}^\tau$, *un domaine* Ω ($\complement\Omega$ *non polaire*), *contenant* $\mathcal{R}_\tau$. *Si* G_Ω *est la fonction de Green et* O *un point fixé quelconque* $\neq \mathcal{R}_\tau$, $\mathrm{G}_\Omega(\mathcal{R}_\tau,\ \mathrm{P}) + h(\mathrm{OP})$ *est, pour* $\mathrm{P} \neq \mathcal{R}_\tau$, *voisin de* $\mathcal{R}_\tau$, *une fonction* $\varphi(\mathrm{P})$ *prolongeable en* $\mathcal{R}_\tau$ *de façon a être harmonique dans un voisinage de* $\mathcal{R}_\tau$, *et* $\varphi(\mathrm{P}) - \varphi(\mathcal{R}_\tau) = \mathrm{O}\left(1/\overline{\mathrm{OP}}^{\tau-1}\right)$.

Pour que $\varphi(\mathrm{P}) - \varphi(\mathcal{R}_\tau)$ *soit un* $\mathrm{o}\left(1/\overline{\mathrm{OP}}^{\tau-1}\right)$ *ou, ce qui est équivalent, soit un* $\mathrm{O}\left(1/\overline{\mathrm{OP}}^{\tau}\right)$ *il faut et il suffit que* O *soit le centre harmonique de* $\complement\Omega$.

Cela résulte des propriétés de l'harmonicité à l'infini (voir AN)[15] et de ce que $\mathrm{G}_\Omega(\mathcal{R}_\tau,\ \mathrm{P}) = \mathrm{K} - \mathrm{V(P)}$, V étant le potentiel d'équilibre de $\complement\Omega$ et K la constante d'équilibre, qui vaut, si $\tau < 2$, $\mathrm{G}_\Omega(\mathcal{R}_\tau,\ \mathcal{R}_\tau)$.

9. Une extension du problème de Dirichlet.

Soit dans $\overline{\mathrm{R}}_\tau$ un ouvert Ω de complémentaire non polaire et F(M) une fonction définie dans $\Omega - \mathrm{A}$, A étant un compact contenu dans Ω. Lorsque $\mathrm{H}_\mathrm{F}^{\Omega_n}$ existe et converge uniformément localement sur Ω (c'est-à-dire uniformément sur tout compact de Ω) vers une même fonction harmonique indépendante de la suite, quand l'ouvert Ω_n tend en croissant vers $\Omega \supset \overline{\Omega}_n$[16], on notera $\mathcal{D}_\mathrm{F}^\Omega$ cette fonction

[15] Rappelons qu'une fonction harmonique au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$, ce point exclu, se développe selon :

$$\mathrm{K} + \alpha h(\mathrm{OM}) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{OM}}^n \mathrm{Y}_n(m) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Y}_n^{(1)}(m)}{\overline{\mathrm{OM}}^{\tau-2+n}}$$

(Y_n, $\mathrm{Y}_n^{(1)}$ fonctions de Laplace du point m correspondant sur Σ_0^1 à $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$).

L'harmonicité à l'infini se traduit par la nullité de α et du premier Σ.

[16] Plus brièvement : si pour $\overline{\omega} \subset \Omega$ ($\omega \supset \mathrm{A}$), $\mathrm{H}_\mathrm{F}^{\omega}$ converge uniformément localement selon l'ordonné filtrant des ω.

limite. Nous en donnerons un cas d'existence utile pour la suite. Auparavent explicitons deux lemmes sous des formes d'ailleurs plus générales qu'il ne serait nécessaire.

Lemme 10. — *Soient dans* $\overline{R}_\tau$ *deux compacts disjoints* A, B, A *étant non polaire et* f, g *deux fonctions sur* $\overset{*}{A}$, $\overset{*}{B}$, *telles que, pour le complémentaire de* $A \cup B$ *elles définissent une donnée-frontière résolutive. Alors* f *est résolutive pour* CA *et, complétée par* 0 *sur la frontière d'un compact* B_1 *quelconque disjoint de* A, *elle devient résolutive pour* $C(A \cup B_1)$. *Si* B_1 *contenant* B *décroît dans une suite et tend vers* B, *la fonction de Wiener pour* $C(A \cup B_1)$ *et la donnée-frontière égale à* f *sur* A, 0 *sur* $\overset{*}{B}_1$ *converge uniformément localement vers la fonction analogue pour* $C(A \cup B)$.

Notons $(f, 0)$ la fonction égale à f sur $\overset{*}{A}$, à 0 ailleurs. Si l'on sait que f est résolutive pour CA, il est aisé de voir que $(f, 0)$ l'est pour $C(A \cup B_1)$, vu l'interprétation de H_f^{CA} dans $C(A \cup B_1)$ comme fonction de Wiener dans cet ouvert plus petit ; et on achève grâce à la propriété de croissance de la mesure harmonique relative à un ouvert qui s'agrandit.

Reste donc à voir la résolutivité de f pour CA ; l'hypothèse montre aussitôt que $(f, 0)$ est résolutive pour $C(A \cup B)$, donc par la même idée précédente de diminution de l'ouvert, pour $C(A \cup B_1)$ où B_1 contiendrait B. *On se ramène* alors aisément au cas-type suivant : soit ω un domaine ($C\omega$ non polaire jouant le rôle de A) contenant le compact α (qui remplace B), de telle sorte que $\omega - \alpha$ soit constitué de p domaines dont chacun admet à sa frontière un point-frontière régulier de ω ; et notons (φ, ψ) la fonction égale à φ sur $\overset{*}{\omega}$, à ψ sur $\overset{*}{\alpha}$. On donne sur $\overset{*}{\omega}$ une fonction f telle que $(f, 0)$ est résolutive pour $\omega - \alpha$; on va montrer que f est résolutive pour ω. On supposera α non polaire, sinon ce serait immédiat.

Considérons pour cela sur $\overset{*}{\omega}$ deux fonctions encadrant f, $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$ (f_1 bornée supérieurement et semie-continue supérieurement, f_2 bornée inférieurement et semi-continue inférieurement) pour lesquelles existe $u = H^{\omega-\alpha}_{(f_1, 0)}$ et $v = H^{\omega-\alpha}_{(f_2, 0)}$ encadrant $H^{\omega-\alpha}_{(f, 0)}$; on sait faire en sorte que la différence soit arbitrairement petite sur un compact choisi à l'avance de $\omega - \alpha$.

Introduisons un domaine ω_1 contenant α tel que $\overline{\omega}_1 \subset \omega$ et appliquons la méthode alternée à $\omega - \alpha$ et ω_1 à partir de u et de v indépendamment. La convergence a lieu parce que le maximum sur

$\overset{*}{\omega}_1$ de $H^{\omega-\alpha}_{(0,1)}$ est un nombre $K < 1$. Si λ majore $|u|$ et $|v|$ sur $\overset{*}{\omega}_1$, les fonctions u_n et v_n obtenues à la n^e opération [17] diffèrent des fonctions limites U et V d'au plus $\frac{\lambda K^n}{1-K}$. Il est d'autre part immédiat que si $|u-v| \leqslant \varepsilon$ sur $\overset{*}{\omega}_1$, $|u_n - v_n| \leqslant n\varepsilon$ sur $\overset{*}{\omega}_1$. On saura donc, en choisissant convenablement f_1 et f_2 faire en sorte que l'on ait sur $\overset{*}{\omega}_1$: $|U-V| < \rho$ arbitrairement donné > 0 à l'avance.

Or, dans $\omega - \alpha$, $U = u + \lim.(u_n - u)$ vaut $H^{\omega-\alpha}_{(0,U)}$. Donc U est bornée supérieurement et admet en tout point-frontière régulier de ω une lim. sup. $\leqslant f$. Propriété analogue pour V. D'où résulte bien que f est résolutive et même que H^{ω}_{f} serait obtenue par le procédé alterné précédent à partir de $H^{\omega-\alpha}_{(f,0)}$.

Remarque. — La propriété de résolutivité de f pour CA équivaut au théorème suivant :

Soit dans un domaine ω ($C\omega$ non polaire) un compact α tel que $\omega' = \omega - \alpha$ soit connexe, et A un point de ω_1. Il y a sur $\overset{*}{\omega}$ équivalence des mesurabilités harmoniques μ^{ω}_{A} et $\mu^{\omega'}_{A}$ (ce que l'on savait d'ailleurs dans un cas plus général [18]) et pour un ensemble e ainsi mesurable sur $\overset{*}{\omega}$,

$$\mu^{\omega}_{A}(e) \leqslant K\mu^{\omega'}_{A}(e) \qquad (K\ C^{te} > 0 \text{ indépendante de } e).$$

Cette inégalité seulement pour les boréliens [19] entraîne d'ailleurs, grâce à l'inégalité contraire évidente sans facteur K, l'équivalence des mesurabilités et équivaut au théorème de résolutivité précédent pour f borélien, théorème traitable très brièvement par le procédé alterné.

(17) La première opération à partir de u donne u_1 égale à u dans $\omega - \omega_1$ et à $H^{\omega_1}_{u}$ dans ω_1 ; la deuxième donne u_2 égale à $H^{\omega-\alpha}_{(f_1,u_1)}$ dans $\omega - \omega_1$ et à $H^{\omega_1}_{u_2}$ dans ω_1, etc.

(18) Voir AN, n° 13, b : soient deux ouverts (de complémentaires non polaires) ω et ω_1, et $E \subset \overset{*}{\omega}_1 \cap \overset{*}{\omega}_2$ non vide avec Δ ouvert $\supset E$ et $\Delta \cap \omega_1 = \Delta \cap \omega_2$. Alors les conditions que $e \subset E$ soit de mesure harmonique nulle sur chacun des composants de ω d'une part, de ω_1 d'autre part, sont équivalentes. D'où il suit que, relativement à un point $M \in \omega \cap \omega_1$, au moins si ω et ω_1 sont connexes (restriction oubliée dans AN), la mesurabilité des $e \subset E$ est la même pour ω et ω_1. Il n'y a qu'à adapter à $\overline{R}^{\tau}$ une des démonstrations données dans R^{τ} (*Bull. Soc. Royale des Sc. de Liège*, 1939, p. 472 et *Bull. Sc. Math.*, t. 65, 1941, proposition 12).

(19) Une meilleure démonstration m'en a été communiquée ensuite par Choquet, qui montre même plus généralement, si α est non polaire, que si f est harmonique > 0 dans ω, $[f - H^{\omega'}_{(0,f)}]/f$ est, en chaque point A de ω', compris entre deux nombres > 0 et < 1 indépendants de f. On se ramène au cas de $f(A) = 1$. Si la proposition était fausse, on trouverait grâce à une suite convenable et à la limite, une fonction f telle que $f = H^{\omega}_{(0,f)}$ avec $H^{\omega'}_{(0,f)} = 0$ en A donc dans ω', ce qui est facilement incompatible avec $f > 0$.

LEMME 11. — *Reprenons dans* $\overline{R}^\tau$, Ω *ouvert de complémentaire non polaire, un compact* A *contenu et* F(M) *définie sur* Ω *au voisinage de* $\overset{*}{\Omega}$. *On notera* $[m, n]$ *la fonction égale à la fonction m au voisinage de* $\overset{*}{\Omega}$ *et à n sur* $\overset{*}{A}$. *Soit sur* $\overset{*}{A}$, f *telle que* $[0, f]$ *soit résolutive pour* $\Omega - A$ *et soit* Ω_n *ouvert tendant en croissant vers* $\Omega \supset \overline{\Omega}_n$. *Si* $H^{\Omega_n - A}_{[F, f]}$ *existe et converge uniformément localement vers une fonction (harmonique) il en est de même de* $H^{\Omega_n}_F$ *et si la première limite est indépendante de la suite* Ω_n, *alors* $\mathfrak{D}^\Omega_F$ *existe.*

Si A est polaire le théorème est évident. On le supposera donc non polaire.

D'après le lemme précédent, $H^{\Omega_n - A}_{[0, f]}$ existe et converge uniformément localement sur $\Omega - A$ vers $H^{\Omega - A}_{[0, f]}$; puis $H^{\Omega_n - A}_{[F, 0]}$ existe et converge uniformément localement ; on verra aisément que cela subsiste si on agrandit A ; enfin $H^{\Omega_n}_F$ existe et il s'agit de voir qu'elle converge aussi uniformément localement.

En considérant chaque domaine composant de Ω et nous débarrassant de la partie impropre, on se ramène au cas du domaine Ω et de $\Omega - A$ se décomposant en p domaines dont chacun admet à sa frontière un point-frontière régulier de Ω. Introduisons comme plus haut le domaine ω^1 contenant A avec $\overline{\omega}_1 \subset \Omega$ et considérons la méthode alternée qui fait passer de $H^{\Omega_n - A}_{[F, 0]}$ à $H^{\Omega_n}_F$, en l'appliquant à $\Omega_n - A$ et ω_1 et à $H^{\Omega_n - A}_{[F, 0]}$; elle réussit grâce au fait que le maximum sur $\overset{*}{\omega}_1$ de $H^{\Omega_n - A}_{[0, 1]}$ est majoré par celui de $H^{\Omega - A}_{[0, 1]}$, nombre fixe < 1. Comparant les opérations pour n et n', on verra, en raisonnant à peu près comme au lemme précédent, que $|H^{\Omega_n}_F - H^{\Omega_{n'}}_F|$ sera majoré par ε sur $\overset{*}{\omega}_1$ (donc dans ω_1) si $|H^{\Omega_n - A}_{[F, 0]} - H^{\Omega_{n'} - A}_{[F, 0]}|$ est suffisamment petit sur $\overset{*}{\omega}_1$, donc si n et n' sont assez grands.

D'où l'énoncé et l'existence de $\mathfrak{D}^\Omega_F$, puisque ω_1 est arbitraire.

APPLICATION. LEMME 12. — *Soit avec le même* Ω, *une fonction sous-harmonique* u *dans* $\Omega - \alpha$ (α *étant un compact dans* Ω) *et y admettant une majorante harmonique* v. *Alors* $\mathfrak{D}^\Omega_u$ *existe.*

Prenons dans Ω un compact A dont l'intérieur contienne α. On voit que $[0, v]$ est résolutive pour $\Omega - A$ et que $H^{\Omega_n - A}_{[u, v]}$ majoré par v est croissante et admet une limite indépendante de la suite Ω_n. D'où le résultat.

Remarque. — On montre aisément que, pour Ω connexe, l'existence d'une majorante harmonique au voisinage de $\overset{*}{\Omega}$ équivaut à la

sommabilité de la fonction de Green (pour une position quelconque du pôle) par rapport à la mesure associée de u prise dans un voisinage de $\overset{*}{\Omega}$.

III. RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR LA REPRÉSENTATION INTÉGRALE ET LA CROISSANCE

10. Faisons d'abord l'étude au voisinage de $O \neq \mathcal{R}_\tau$; $h(\mathrm{MP})$ étant pour M fixé $\neq O$, harmonique en P dans D_0^{OM} se développe sur chaque droite issue de O selon une série entière unique en OP

$$(3) \qquad h(\mathrm{MP}) = h(\mathrm{MO}) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^{\mathrm{M}}(p)\overline{\mathrm{OP}}^n$$

($Y_n^{(\mathrm{M})}(p)$ fonction de Laplace d'ordre n sur Σ_0^1 de R^τ, p correspondant à la direction $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$) et, comme on le sait, avec convergence uniforme dans tout $D_0^r (r < \mathrm{OM})$.

Mais, soit à partir du développement élémentaire classique pour OP assez petit :

$$(4) \qquad \frac{1}{\mathrm{MP}} = \frac{1}{\mathrm{MO}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_n(\cos\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}})\overline{\mathrm{OP}}^n}{\overline{\mathrm{OM}}^{n+1}}$$

($\mathcal{L}_n$ polynome de Legendre de degré n, $\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}}$ angle $(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}})$) et par un calcul de substitution de séries pour passer à $h(\mathrm{MP})$, soit par un développement analogue direct de $h(\mathrm{MP})$, on voit que le $Y_n^{\mathrm{M}}(p)$ de (3) est de la forme $Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}})/\overline{\mathrm{OM}}^{\tau-2+n}$ où $Z_n^{(\tau)}$ est un polynome de degré n à coefficients numériques, indépendants de M et P (cas particulier de ceux de Gegenbauer obtenus en développant $\overline{\mathrm{MP}}^{-\alpha}$ ou $\log \mathrm{MP}$), d'ailleurs différent de 0 pour la valeur 1 de la variable, puisque valant alors le coefficient de x^n dans le développement en série entière de $h(1-x)$.

Nous partirons donc du développement :

$$(5) \qquad h(\mathrm{MP}) = h(\mathrm{MO}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}})\overline{\mathrm{OP}}^n}{\overline{\mathrm{OM}}^{\tau-2+n}}$$

où $Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}})\overline{\mathrm{OP}}^n$ est, relativement à l'origine O des coordonnées, un polynome harmonique homogène de degré n, de révolution autour de OM. On sait d'ailleurs qu'un tel polynome est unique à un facteur près (ce qui suffit donc à déterminer $Z_n^{(\tau)}(x)$ à partir de sa valeur indiquée plus haut pour $x = 1$).

Noter que $Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_M^P)$ étant harmonique de M dans R^τ il en est de même dans $R^\tau - O$ pour la transformée de Kelvin

$$Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_M^P)/\overline{OM}^{\tau-2+n}.$$

Nous poserons pour p entier $\geqslant 0$

$$(6)\quad \mathcal{H}_p^0(M, P) = h(MP) - h(MO) - \sum_{n=1}^{p} \frac{Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_M^P)\overline{OP}^n}{\overline{OM}^{\tau-2+n}}$$

en convenant que $\sum_{n=1}^{0} = 0$.

On remarquera essentiellement que dans $D_0^{\lambda OM}$ $(0 < \lambda \text{ fixé} < 1)$

$$(7)\qquad |\mathcal{H}_p^0(M, P)| \leqslant K_{p+1}\frac{\overline{OP}^{p+1}}{\overline{OM}^{\tau-2+p+1}}$$

(K_{p+1}, C^te^ indépendante de M et P)

On peut le voir sans étudier la série ni les Z_n en remarquant que le reste de la série commençant au terme en $\overline{OP}^n$ est, d'après la formule de Taylor à une variable, majorée en module par $\frac{\delta_n}{n!}\overline{OP}^n$ où δ_n majore en module les dérivées n^e, pour tout système d'axes, de $h(MP)$ (M fixé, $P \in D_0^{\lambda OM}$) et il n'y a qu'à chercher un tel δ_n de proche en proche [20].

11. Une mesure de Radon $\mu \leqslant 0$ étant donnée dans Ω ouvert $\neq R^\tau$, on a déjà rappelé au n° 6 qu'il existe dans Ω une fonction sous-harmonique associée. Lorsque Ω est un $D_0^R - O$, *si la mesure totale est finie,* le potentiel $\int h(MP)d\mu_P$ est bien une telle fonction, sous-harmonique même dans R^τ.

Examinons le cas où au voisinage de O, cette masse totale n'est plus finie et où la distribution des masses a une croissance plus ou moins rapide.

Théorème 1. — *Soit dans* $R^\tau - O$ *une mesure de Radon* $\mu \leqslant 0$, *nulle hors d'un compact,* $s > 0$ *et* p_s *le plus grand entier* $< s$.

[20] On introduit les $\Sigma_O^{\rho_l}\left[\rho_l = OM\left(1 - \frac{(1-\lambda)l}{n}\right)\right]$, $l = 1, 2 \ldots n$ et on part d'un majoration des dérivées premières sur $\Sigma_O^{\rho_1}$ soit

$$n/(1-\lambda)OM \quad (\tau = 2) \qquad \text{ou} \qquad (\tau-2)[n/(1-\lambda)OM]^{\tau-1} \quad (\tau > 2),$$

immédiate en observant que ces dérivées sont en P majorées en module par la dirivée dans la direction PO. On passera à une majoration des dérivées secondes sur $\Sigma_O^{\rho_2}$ par la formule rappelée note 11 etc. jusqu'à une majoration des dérivées sur $\Sigma_O^{\lambda OM}$.

α) *Supposons* $\overline{\mathrm{OP}}^s$ *sommable-*μ_{P}, *ce qui équivaut à une sommabilité en* r *de* $r^{s-1}\mu(\Delta_0^r)$; *alors* $\int \mathcal{H}^0_{p_s}(\mathrm{M}, \mathrm{P})d\mu_{\mathrm{P}}$ *est une intégrale de Radon* ($\mathrm{M} \in \mathrm{R}^\tau - \mathrm{O}$) *et représente une fonction sous-harmonique* $v(\mathrm{M})$ *dans* $\mathrm{R}^\tau - \mathrm{O}$ ([21]), *associée à* μ *et telle que :*

$$(8) \qquad v^+(\mathrm{M}) = o\left(\overline{\mathrm{OM}}^{-(\tau-2+s)}\right) \quad (\mathrm{M} \to \mathrm{O}).$$

β) *Supposons* $\mu(\Delta_0^r) = o(r^{-s})(r \to 0)$, *ce qu'entraînerait* ($\alpha$) *par le lemme* 2C.

Si s *n'est pas entier,* $\int \mathcal{H}^0_{p_s}(\mathrm{M}, \mathrm{P})d\mu_{\mathrm{P}}$ *est encore intégrale de Radon, sous-harmonique associée à* μ *dans* $\mathrm{R}^\tau - \mathrm{O}$, *satisfaisant à* (8).

Si s *est entier et si* $\int_{C_0^{\rho, r}} Z_s^{(\tau)}(\cos\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}})\overline{\mathrm{OP}}^s d\mu_{\mathrm{P}} \to 0$ *avec* r *uniformément par rapport à* $\rho < r$ *et à la direction* OM, *alors* $\lim\limits_{r \to 0} \int_{\Delta_0^r} \mathcal{H}^0_{p_s}(\mathrm{M}, \mathrm{P})d\mu_{\mathrm{P}}$ *existe et représente une fonction sous-harmonique associée à* μ *dans* $\mathrm{R}^\tau - \mathrm{O}$ et *satisfaisant à* (8).

γ) *Supposons* $\mu(\Delta_0^r) = \mathrm{O}(r^{-s})$.

Si s *n'est pas entier,* $\int \mathcal{H}_{p_s}(\mathrm{M}, \mathrm{P})d\mu_{\mathrm{P}}$ *est encore intégrale de Radon, sous-harmonique* v *associée à* μ *dans* $\mathrm{R}^\tau - \mathrm{O}$ *et satisfait à*

$$(9) \qquad v^+(\mathrm{M}) = \mathrm{O}\left(\overline{\mathrm{OM}}^{-(\tau-2+s)}\right) \quad (\mathrm{M} \to \mathrm{O}).$$

Si s *est entier et si* $\int_{\Delta_0^r} Z_s^{(\tau)}(\cos\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}})\overline{\mathrm{OP}}^s d\mu_{\mathrm{P}}$ *est borné uniformément en* r ([22]) *et* M, *alors pour une suite* r_k *convenable* $\to 0$, $\lim\limits_{k \to \infty} \int_{\Delta_0^{r_k}} \mathcal{H}^0_{p_s}(\mathrm{M}, \mathrm{P})d\mu_{\mathrm{P}}$ *existe et représente une fonction sous-harmonique* $v(\mathrm{M})$ *dans* $\mathrm{R}^\tau - \mathrm{O}$ *associée à* μ, *satisfaisant à* (9). *Noter que dans* β *et* γ, *la condition supplémentaire sur* μ *équivaut* ([23]) *(en lui adjoignant l'autre) à ce que pour tous les polynomes harmoniques homogènes d'ordre* s, *de coefficients bornés par un nombre fixe, ou seulement pour tous ceux déduits de l'un non nul par rotation autour*

([21]) Et qui prolongée par 0 en $\mathcal{R}_\tau$ est même harmonique au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$; même remarque dans les cas β, γ qui suivent.

([22]) Ou même seulement pour les valeurs d'une suite $\to 0$. On peut faire une amélioration analogue dans β.

([23]) Car on sait que, comme polynomes harmoniques homogènes d'ordre n linéairement indépendants en nombre maximum, on peut prendre ceux déduits par des rotations convenables d'un seul non nul. (Voir à ce sujet un mémoire en collaboration avec G. Choquet, à paraître prochainement.)

de l'origine O, l'intégrale-dμ sur $C_0^{\varepsilon, r}$ ou Δ_0^r tende uniformément vers 0 avec r ou respectivement soit uniformément bornée.

D'autre part, cette condition supplémentaire sur μ est satisfaite si μ est la somme d'une mesure invariante par rotation autour de O et d'une mesure par rapport au module (variation totale de laquelle $\overline{\mathrm{OP}}^s$ est sommable.

La majoration (7) de $\mathcal{H}$ fournira, grâce au lemme 2, tout ce qui concerne l'existence et le caractère sous-harmonique des intégrales de Radon ; de même pour les limites d'intégrales de β et γ en mettant $\mathcal{H}_{p_s}$ c'est-à-dire $\mathcal{H}_{s-1}$ sous la forme $\dfrac{Z_s^{(\tau)}(\cos\gamma_{\mathrm{M}}^{\mathrm{P}})\overline{\mathrm{OP}}^s}{\overline{\mathrm{OM}}^{\tau-2+s}} + \mathcal{H}_s$; dans ce cas de (γ), on suppose d'abord $\mathrm{OM} > \rho$ fixé et on choisit r_n telle que $\int_{C_0^{r_n, \rho}} \mathcal{H}_{p_s}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, d\mu_{\mathrm{P}}$ converge uniformément localement dans $\mathrm{R}^\tau - \overline{\mathrm{D}}_0^\rho$ vers une fonction harmonique en M ; on donne à ρ les valeurs d'une suite $\to 0$, en prenant à chaque fois pour r_n une suite extraite de la précédente. Le procédé diagonal fournira la solution.

Pour avoir les limitations de croissance, on décomposera les intégrales de Radon selon $\int_{\overline{\Delta}_0^r} + \int_{\mathrm{D}_0^r - 0}$ avec $r = \mathrm{OM}/2$. Pour majorer la première partie on décompose le $\mathcal{H}$ et on remarque d'abord que l'intégrale de la somme des deux premiers termes est majorée par $o(r^{-(\tau-2+s)})$ dans les cas α, β et par $O(r^{-(\tau-2+s)})$ dans γ ; il suffit, d'après l'allure de μ, d'appliquer le lemme 2, en examinant séparément le cas $\tau \geqslant 3$ (où l'on considérera les intégrales respectives des deux termes) et le cas $\tau = 2$ (où l'on appliquera le dernier résultat des lemmes 2 A ou B) ; puis pour chaque terme suivant de $\mathcal{H}$, s'il y en a et où alors $1 \leqslant n < s$ on aura, toujours grâce au lemme 2, une limitation en o ou O de $r^{-(\tau-2+s)}$. D'où la première partie, ces mêmes types respectifs de majoration. La seconde partie se majore grâce à (7), ce qui par le lemme 2 donne encore un o ou O de $r^{-(\tau-2+s)}$.

Enfin, dans les cas β, γ avec s entier, on fera la décomposition $\int_{\overline{\Delta}_0^r} + \lim . \int_{C_0^{r_k, r}}$ et un raisonnement analogue en décomposant dans la seconde partie $\mathcal{H}_{s-1}$ comme plus haut.

12. Rappelons d'après (FAS) que si u est sous-harmonique dans $\mathrm{D}_0^{\mathrm{R}_0} - \mathrm{O}$, $\mathfrak{M}_u^r(\mathrm{O})$ et $\mathfrak{M}_u^r/h(r)$ ont des limites pour $r \to 0$, la seconde, λ_m étant $> -\infty$; de même, puisque u^+ est sous-harmonique, pour $\mathfrak{M}_{u^+}^r$ et $\mathfrak{M}_{u^+}^r/h(r)$.

On sait aussi que pour $r \to 0$,

α) si $\mathfrak{M}_{u^+}^r / h(r) \to 0$, u^+ est borné au voisinage de O et u se prolonge en O de façon à devenir sous-harmonique dans $D_0^{R_0}$,

β) si $\mathfrak{M}_{u^+}^r / h(r)$ est seulement borné, c'est-à-dire de limite finie, $u^+/h(\mathrm{OM})$ est borné au voisinage de O et u est de la forme $\lambda_m h(\mathrm{OM}) + fct\ s\ h$ dans $D_0^{R_0}$ (cette fonction ayant même un λ_m nul).

Ce cas β rentre dans celui de λ_m *fini* qui caractérise *l'existence d'une majorante harmonique dans tout* $D_0^R - O(R < R_0)$ et équivaut aussi à ce que la masse totale associée à u dans $D_0^R - O$ soit finie, ou encore à la *validité de la représentation de F. Riesz* dans $D_0^R - O$ (avec la fonction de Green ou seulement avec $h(\mathrm{MP})$).

Nous irons maintenant plus loin en considérant des croissances plus rapides et en prolongeant la représentation de Riesz.

Théorème 2. — *Soit dans* $D_0^{R_0} - O$ *une fonction sous-harmonique de mesure associée* μ, $s > 0$ *et* p_s *le plus grand entier* $< s$. *Alors avec* $0 < r$ *variable* $\leqslant R$ *fixé* $< R_0$,

A) *si* $r^{\tau-3+s}\mathfrak{M}_{u^+}^r(O)$ *est sommable en* r (*ce qui entraîne* $\mathfrak{M}_{u^+}^r = o(r^{-(\tau-2+s)})$ $(r \to 0)$ *et les mêmes propriétés avec u*), *ou bien*

B) *si* $\mathfrak{M}_{u^+}^r(O) = O(r^{-(\tau-2+s)})$ (*ce qui entraîne la même propriété pour u et il en serait de même avec un* o) *et si en outre s n'est pas entier, alors on aura dans* $D_0^R - O$ *une représentation avec une intégrale de Radon :*

$$(10) \qquad u(\mathrm{M}) = \int_{D_0^R - O} \mathcal{H}_{p_s}^0(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, d\mu_{\mathrm{P}} + fct\ harm.\ w$$

$$\text{où} \qquad w(\mathrm{M}) = fct\ harm.\ dans\ D_0^R + \frac{\alpha_R}{\varphi_\tau} h(\mathrm{OM}) + \sum_{n=1}^{p_s} \frac{Y_n(m)}{\overline{\mathrm{OM}}^{\tau-2+n}}$$

avec : $Y_n(m)$ *fonction de Laplace d'ordre* n *sur* Σ_0^1 *de* R^τ, m *correspondant à* $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

$\Sigma_1^{p_s}$ *valant* 0 *pour* $p_s = 0$,

α_R *étant le flux de u à travers* Σ_0^R *pris du côté de* D_0^R *avec l'orientation vers* D_0^R [24].

Traitons (A). Comme $\mathfrak{M}_u^r / h(r)$ est borné inférieurement, $-\mathfrak{M}_u^r r^{\tau-3+s}$ sera majoré par une fonction sommable, et, d'après $\mathfrak{M}_{u^-}^r \leqslant \mathfrak{M}_{u^+}^r - \mathfrak{M}_u^r$, $r^{\tau-3+s}\mathfrak{M}_{u^-}^r$ sera sommable donc aussi $r^{\tau-3+s}\mathfrak{M}_u^r$.

Le lemme 4 C montre que $r^{\tau-2+s}\mathfrak{M}_{u^+}^r \to 0$ et que $r^{s-1}\mu(C_0^{r, R})$ est

(24) Voir la note 8.

sommable. Alors d'après le théorème I. α. l'intégrale v de Radon de l'énoncé existe, est sous-harmonique et associée à μ dans $D_O^R - O$; elle satisfait à $v^+(M) = o(\overline{OM}^{-(\tau-2+s)})$ $(M \to O)$ d'où puisque $\mathfrak{M}_{v^-}^r = \mathfrak{M}_{v^+}^r - \mathfrak{M}_v^r$ et que $-\mathfrak{M}_v^r/h(r)$ est bornée supérieurement, $\mathfrak{M}_{v^-}^r = o(r^{-(\tau-2+s)})$.

Ainsi u est dans $D_O^R - O$ la somme de v et d'une fonction harmonique w, et comme $w^+ \leqslant u^+ + v^-$ on aura $\mathfrak{M}_{w^+}^r = o(r^{-(\tau-2+s)})$.

Donc dans le développement classique de w au voisinage de O, il n'y a pas de termes en $1/\overline{OM}^{\tau-2+n}$ pour $n \geqslant s$.

D'où la représentation (10). Démonstration analogue du cas B.

Il reste seulement à interpréter le coefficient de $h(OM)$ dans le développement de w. Cela vient de ce que le flux du type considéré pour l'intégrale v est nul, ce qui résulte par exemple de ce que, par intégration sous $\int$

$$\mathfrak{M}_v^r = \int_{C_O^{r,R}} h(OP)\,d\mu_P - h(r)\mu(C_O^{r,R})$$

d'où
$$\frac{\mathfrak{M}_v^r}{h(r) - h(R)} \to o (r \to R,\ r < R)$$

qui s'interprète en nullité du flux considéré.

Corollaire. — *Soit u sous-harmonique dans $D_O^{R_0} - O$*

$$0 < r < R \textit{ fixé} < R_0, \quad s > 0$$

a) *si $r^{\tau-2+s-1}\mathfrak{M}_{u^+}^r(O)$ est sommable en r, s quelconque ou si $\mathfrak{M}_{u^+}^r = o(r^{-(\tau-2+s)})$ $(r \to 0)$ avec s non entier, alors*

$$(11) \qquad u^+(M) = o(\overline{OM}^{-(\tau-2+s)}) \quad (M \to O)$$

b) *si $\mathfrak{M}_{u^+}^r = O(r^{-(\tau-2+s)})$ avec s non entier,*

$$(12) \qquad u^+(M) = O(\overline{OM}^{-(\tau-2+s)})$$

et l'énoncé simple moins précis, pour s quelconque > 0 :

c) *si* $\mathfrak{M}_{u^+}^r = O(r^{-(\tau-2+s)})$. $\quad u^+(M) = o(\overline{OM}^{-(\tau-2+s+\varepsilon)})$
avec $\varepsilon > 0$ quelconque.

Remarque complémentaire I. — Si $\mathfrak{M}_{u^+}^r$ est un o ou O de $r^{-(\tau-2+s)}$, on a vu qu'il en est de même de $\mathfrak{M}_u^r$ et que par suite $\mu(C_O^{r,R})$ est o ou O respectivement de r^{-s}; mais nous ne savons pas, *pour s entier*, si les conditions supplémentaires sur μ des cas β, γ du théorème I sont aussi respectivement satisfaites. Nous le démontrerons au

chapitre suivant pour $s=1$; en tout cas *si elles sont satisfaites*, on aura des représentations analogues à (10), où l'intégrale sera remplacée par les limites d'intégrales des cas β ou γ (s entier, théorème 1) et l'on verra que le w de (10) sera de la même forme, avec la même interprétation de α_R mais où p_s devra être remplacé par s lorsque s est entier et que $\mathfrak{M}_{u+}^r$ est seulement $O(r^{-(\tau-2+s)})$; il s'ensuivra les limitations (11) ou (12).

Remarque 2. — α_R peut encore s'interpréter comme suit : si on modifie u dans un $D_0^r(r<R)$ de façon à ce qu'elle devienne différence de deux fonctions sous-harmoniques dans D_0^R (voir la note 7), $\dfrac{\alpha_R}{\varphi_\tau}$ est la masse totale associée dans D_0^R (différence des masses totales associées).

13. Passons à l'étude analogue au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$.

On peut procéder par inversion (voir note 10) à partir des résultats précédents, ce qui est particulièrement facile pour $\tau=2$ ou faire une étude directe analogue en s'appuyant sur les lemmes relatifs à $\mathcal{R}_\tau$.

Par inversion ou par simple permutation de M et P dans (5), on aura le développement de base, O étant fixé :

$$h(\mathrm{MO})=h(\mathrm{OP})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_M^P)\overline{\mathrm{OM}}^n}{\overline{\mathrm{OP}}^{\tau-2+n}} \tag{5'}$$

valable pour $\mathrm{OP}>\mathrm{OM}$ avec limitation en module $K_n\dfrac{\overline{\mathrm{OM}}^n}{\overline{\mathrm{OP}}^{\tau-2+n}}$ du reste commençant au n^e terme inclus, pour $\mathrm{OP}>\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{OM}\ (0<\lambda<1)$.

On posera :

$$\mathcal{H}_p'^{O}(\mathrm{M},\ \mathrm{P})=h(\mathrm{MP})-h(\mathrm{OP})-\sum_{n=1}^{p}\frac{Z_n^{(\tau)}(\cos\gamma_M^P)\overline{\mathrm{OM}}^n}{\overline{\mathrm{OP}}^{\tau-2+n}} \tag{6'}$$

en convenant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{0}=0$.

Soit la mesure $\mu\leqslant 0$ dans R^τ. *La condition* que $\int h(\mathrm{MP})d\mu_P$ soit finie quand on ôte les masses d'un D_M^r équivaut à cette condition pour *une* position O de M, et aussi, lorsque $\tau>2$, à ce que $\mu(D_0^r)r^{-(\tau-1)}$ soit sommable en r au voisinage de l'infini [25] (ce qui entraîne

[25] Évident par le lemme 4′ C. Cela n'était pas indiqué dans (AN) par ailleurs plus complet.

$\mu(D_0^r) = o(r^{\tau-2}))$; lorsque $\tau = 2$, elle entraîne que la masse totale soit finie.

Sous la condition indiquée, $v(M) = \int h(MP) d\mu_P$ est sous-harmonique dans R^τ, associée à μ et

si $\quad \tau > 2, \quad v \leqslant 0 \quad$ et $\quad \lim_{M \to \mathcal{R}_\tau} \sup v(M) = \lim_{r \to \infty} \mathfrak{M}_v^r(O) = 0$

si $\quad \tau = 2, \quad \lim_{M \to \mathcal{R}_\tau} \sup \dfrac{v(M)}{\log OM} = \lim_{r \infty} \dfrac{\mathfrak{M}_v^r}{\log r} = -$ masse totale.

Examinons maintenant des croissances plus rapides de μ.

Théorème 1′. — *Soit dans* R^τ *une mesure de Radon* $\mu \leqslant 0$, *nulle au voisinage d'un point* O, *puis* $s > 0$ *et* p_s *le plus grand entier* $< s$.

α) *Supposons* $\overline{OP}^{-(\tau-2+s)}$ *sommable* -μ_P, *ce qui équivaut à la sommabilité en* r *de* $r^{-(\tau-2+s-1)}\mu(D_0^r)$; *alors* $\int \mathcal{H}_{p_s}^{\prime O}(M, P) d\mu_P$ *est pour* $M \in R^\tau$ *une intégrale de Radon représentant une fonction sous-harmonique* $v(M)$ *dans* R^τ *associée à* μ, *telle que*

$$(8') \qquad v^+(M) = o\left(\overline{OM}^s\right) \quad (M \to \mathcal{R}_\tau)$$

β) *Supposons* $\mu(D_0^r) = o(r^{\tau-2+s})$, *ce qui entraînerait* (α).

Si s *n'est pas entier* $\int \mathcal{H}_{p_s}^{\prime O}(M, P) d\mu_P$ *est une intégrale de Radon, sous-harmonique, associée à* μ *dans* R^τ, *satisfaisant à* (8′).

Si s *est entier et si* $\displaystyle\int_{C_O^{r,\rho}} \frac{Z_s^{(\tau)}(\cos \gamma_M^P)}{\overline{OP}^{\tau-2+s}} d\mu_P \to 0 \ (r \to \infty)$ *uniformément par rapport à* $\rho > r$ *et à la direction* OM, *alors* $\displaystyle\lim_{r \to \infty} \int_{D_O^r} \mathcal{H}_{p_s}^{\prime O}(M, P) d\mu_P$ *existe et représente une fonction sous-harmonique associée à* μ *dans* R^τ *satisfaisant à* (8′).

γ) *Supposons* $\mu(D_0^r) = O(r^{\tau-2+s})$.

Si s *n'est pas entier,* $\int \mathcal{H}_{p_s}^{\prime O}(M, P) d\mu_P$ *est encore une intégrale de Radon, sous-harmonique,* v *associée à* μ *dans* R^τ *et satisfait à*

$$(9') \qquad v^+(M) = O\left(\overline{OM}^s\right) \quad (M \to \mathcal{R}_\tau).$$

Si s *est entier et si* $\displaystyle\int_{D_O^r} \frac{Z_s^{(\tau)}(\cos \gamma_M^P)}{\overline{OP}^{\tau-2+s}} d\mu_P$ *est borné uniformément par rapport à la direction* OM, *alors, pour une suite* r_k *convenable* $\to \infty$. $\displaystyle\lim_{k \infty} \int_{D_O^{r_k}} \mathcal{H}_{p_s}^{\prime O}(M, P) d\mu_P$ *existe et représente une fonction sous-harmonique* $v(M)$ *dans* R^τ, *associée à* μ, *satisfaisant à* (9′).

Dans β ou γ, la condition supplémentaire sur μ équivaut (dans son association avec l'autre) à celle correspondante du théorème 1 pour la transformée de μ (voir note 10) ou directement à ce que pour tous les polynomes X harmoniques homogènes d'ordre s, à coefficicients bornés par un nombre fixe ou seulement pour ceux déduits de l'un d'eux non nul par rotation, $\int \frac{X}{\overline{OP}^{\tau-2+2s}} d\mu$ *pris sur* $C_O^{r,\rho}$ *ou* D_O^r *tende uniformément vers* 0 *avec* $1/r$ *ou soit uniformément bornée. Cette condition supplémentaire est d'ailleurs satisfaite si μ est la somme d'une mesure invariante par rotation autour de O et d'une mesure par rapport au module de laquelle* $\overline{OP}^{-(\tau-2+s)}$ *est sommable.*

Enfin, pour une mesure de Radon $\leqslant 0$ au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$, ce point exclu, toutes les conditions précédentes sont bien invariantes en O dès qu'on ôte les masses d'un voisinage de O.

14. Partons, pour le voisinage de $\mathcal{R}_\tau$. de résultats connus (qui sont d'ailleurs à peu près dans (AN) avec des compléments) correspondant par inversion à ceux qu'on a rappelés plus haut pour le voisinage de O (début n° 12).

Soit u sous-harmonique dans $\Delta_O^{R_0}$; $\mathfrak{M}_u^r(O)$ a une limite m_u (pour $r \to \infty$) d'ailleurs $> -\infty$ si $\tau > 2$; et si $\tau = 2$, $\dfrac{\mathfrak{M}_u^r}{\log r}$ a une limite $\lambda > -\infty$.

Si pour $\tau > 2$, $\mathfrak{M}_{u^+}^r$ est borné ($r \to \infty$), u^+ est borné au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$.

Si pour $\tau = 2$, $\mathfrak{M}_{u^+}/\log r$ est borné, c'est-à-dire de limite λ finie, $u^+/\log \mathrm{OM}$ est borné au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$; et même u^+ l'est si $\lambda = 0$.

Ces cas rentrent dans celui où m_u (pour $\tau > 2$), resp. $\lambda_u(\tau = 2)$ sont finis, ce qui est équivalent à l'existence d'une majorante harmonique dans tout $\Delta_O^R(R > R_0)$, ou bien à ce que dans Δ_O^R : pour $\tau > 2$, $\overline{OP}^{-(\tau-2)}$ soit sommable-μ_P, pour $\tau = 2$, la masse totale soit finie; ou bien encore à la validité de la représentation de Riesz dans Δ_O^R (avec la fonction de Green de ce domaine ou seulement avec $h(\mathrm{MP})$).

Examinons des croissances plus rapides de $\mathfrak{M}_{u^+}^r$ et prolongeons la représentation intégrale.

Théorème 2'. — *Soit dans $\Delta_O^{R_0}$, u sous-harmonique de mesure associée μ, $s > 0$ et p_s le plus grand entier $< s$. Alors avec r variable, voisin de $+\infty$:*

A) *Si* $r^{-(s+1)}\mathfrak{M}^r_{u^+}(O)$ *est sommable en* r $\Big($*ce qui entraîne* $\mathfrak{M}^r_{u^+} = o(r^s)$ *et les mêmes propriétés avec* $u$$\Big)$.

Ou bien

B) *Si* $\mathfrak{M}^r_{u^+}(O) = O(r^s)$ (*ce qui entraîne la même propriété pour* u *et il en serait de même avec un* o) *et si en outre* s *n'est pas entier.*

(*ces hypothèses étant d'ailleurs invariantes en* O *pour un* u *sous-harmonique au voisinage de* $\mathcal{R}_\tau$ *ce point exclu*),

alors on aura dans Δ^R_0(R *fixé* $>$ R_0) *la représentation par une intégrale de Radon*

$$(10') \qquad u(M) = \int_{\Delta^R_0} \mathcal{H}'^{O}_{p_s}(M, P)\, d\mu_P + fct\ harm.\ w$$

où $\quad w(M) = fct\ harm.\ dans\ \Delta'^R_0 - \frac{\alpha_R}{\varphi_\tau} h(OM) + \sum_{n=1}^{p_s} Y_n(m)\overline{OM}^n$

avec : $Y_n(m)$ *fonction de Laplace d'ordre* n *sur* Σ^1_0 *de* R^τ, m *correspondant à* $\overrightarrow{OM}$, *le* Σ *valant* o *pour* $p_s = 0$.

α_R *étant le flux de* u *à travers* Σ^R_0 *pris du côté de* Δ^R_0 *avec l'orientation vers* Δ^R_0 (26).

Corollaire. — *Pour* u *sous-harmonique dans* $\Delta^{R_0}_0$, $s > 0$,

a) *si* $r^{-s}\mathfrak{M}^r_{u^+}$ *est sommable en* r *au voisinage de l'infini et* s *quelconque ou si* $\mathfrak{M}^r_{u^+} = o(r^s)(r \to \infty)$ *avec* s *non entier, alors*

$$(11') \qquad u^+(M) = o(\overline{OM}^s) \qquad (M \to \mathcal{R}_\tau),$$

b) *si* $\mathfrak{M}^r_{u^+} = O(r^s)$ *avec* s *non entier, alors*

$$(12') \qquad u^+(M) = O(\overline{OM}^s).$$

c) *si* $\mathfrak{M}^r_{u^+} = O(r^s)$, $u^+(M) = o(\overline{OM}^{s+\varepsilon})(\varepsilon > 0)$.

Remarque. — Lorsque $\mathfrak{M}^r_{u^+}$ est un o ou O de r^s, s entier, si la condition supplémentaire dans β ou γ (théorème 1′) est satisfaite, on aura une représentation analogue à (10′) où l'intégrale sera remplacée par une limite d'intégrale (comme dans β ou γ, cas de s entier, théorème 1′) et où l'on verra que le w de (10′) sera de la même forme, avec le même α_R, à condition d'y remplacer p_s par s lorsque s est entier et que l'on a seulement $\mathfrak{M}^r_{u^+} = O(r^s)$; et il s'ensuivra les limitations (11′) ou (12′).

(26) Dans la démonstration par inversion du théorème 2′, on n'obtient pas pour $\tau > 2$ l'interprétation du coefficient de h(OM) ; mais il suffit de voir que l'intégrale de (10′) est de flux nul.

Enfin $\dfrac{\alpha_R}{\varphi_\tau}$ vaut la masse totale dans $\Delta_0'^R$ associée à toute différence de deux fonctions sous-harmoniques dans $\Delta_0'^R$, égale à u (presque partout) au voisinage de Σ_0^R.

IV. ÉTUDE PLUS APPROFONDIE D'UN CAS PARTICULIER

15. Rassemblons dans un cas simple des résultats que nous allons pouvoir compléter.

THÉORÈME 3. — I. *Soit d'abord u sous-harmonique dans $D_0^{R_0} - O$, μ la mesure $\leqslant 0$ associée ; et r variable* $(0 < r \leqslant R$ *fixé* $< R_0)$.

A) *Si* $\mathfrak{M}_{u^+}^r(O) = O(r^{-(\tau-1)})\ (r \to 0)$, *alors* $\mu(C_0^{r,R}) = O(1/r)$, $\overline{OM}^{(1+\alpha)}\ (\alpha > 0)$ *est sommable-μ au voisinage de* O, *et pour toute fonction linéaire φ s'annulant en* O, $\int_{C_0^{r,R}} \varphi d\mu$ *est borné indépendamment de r ; cela permet la représentation intégrale signalée fin du n° 12 et donne*

$$u^+(M) = O(\overline{OM}^{-(\tau-1)}) \qquad (M \to O).$$

B) *Si* $\mathfrak{M}_{u^+}^r(O) = o(r^{-(\tau-1)})$, alors $\mu(C_0^{r,R}) = o(1/r)$ et $\int_{C_0^{\rho,r}} \varphi d\mu \to 0$ *avec r indépendamment de $\rho < r$, d'où la représentation intégrale signalée aussi fin n° 12 et*

$$u^+(M) = o(\overline{OM}^{-(\tau-1)}) \qquad (M \to O).$$

C) *Si* $r^{\tau-2}\mathfrak{M}_{u^+}^r$ *est sommable en r, l'hypothèse* B *est satisfaite*, OP *est sommable-μ et on a la représentation avec intégrale de Radon du théorème 2.*

II. *Il est intéressant dans les cas* B *et* C *de préciser davantage comme suit la représentation intégrale :*

Soit maintenant dans $\overline{R}^\tau$ *un domaine* Ω *(avec* $C\Omega$ *non polaire, et fonction de Green notée* $G_\Omega(M, P)$ *ou seulement* G) ; O *un point de* Ω *différent de* $\mathcal{R}_\tau$ *et u sous-harmonique dans* Ω-O, *majorée au voisinage de* $\overset{*}{\Omega}$ *par une fonction harmonique et de mesure μ associée. Si* $D_0^R \subset \Omega$, *on a, avec la seule hypothèse* B, $\mathfrak{D}_u^\Omega$ *ayant été défini au n° 9, la représentation :*

$$(13)\quad u(M) = \mathfrak{D}_u^\Omega(M) + \int_{\Omega - D_0^R} G(M, P)\, d\mu_P$$
$$+ \lim_{r \to 0} \int_{C_0^{r,R}} [G(M, P) - G(M, O)]\, d\mu_P + \frac{\alpha_R}{\varphi_\tau} G(O, M)$$

α_R désigne le flux de u à travers Σ_0^R défini du côté de D_0^R et avec l'orientation vers D_0^R, ou encore, si on modifie u dans un $D_0^r(r < R)$ de façon à la rendre égale presque partout dans D_0^R à la différence de deux fonctions sous-harmoniques, α_R/φ_τ vaut la masse totale associée dans D_0^R à cette différence.

$\int_{C_{r,\rho}^O} [G(M, P) - G(M, O)] d\mu_P$ et sa limite pour $r \to 0$ tendent vers 0 avec ρ uniformément en M hors d'un voisinage de O [27].

Si la mesure μ d'un voisinage de Ω est finie, on peut remplacer les deux intégrales par $\lim_{r\to 0} \int_{\Omega - D_0^r} [G(M, P) - G(M, O)] d\mu_P$ en prenant comme coefficient de G(O, M) la masse totale [28] *associée à la fonction u modifiée comme précédemment.*

Enfin si on remplace l'hypothèse B par C la limite d'intégrale est une intégrale de Radon sur $D_0^R - O$ ou $\Omega - O$.

Etablissons d'abord (13) dans l'hypothèse B. $\mathfrak{D}_u^\Omega$ existe d'après le lemme 12. Notons (Ψ_1, Ψ_2) la fonction égale à Ψ_1 au voisinage de Ω et à Ψ_2 ailleurs et ω le domaine $\Omega - \overline{D}_0^r(r \leqslant R)$. Voyons que $v(M) = u(M) - \mathfrak{D}_u^\Omega(M)$ admet dans ω une plus petite majorante harmonique égale à $H_{(0,v)}^\omega$. En effet, soit Ω_n croissant tendant vers $\Omega \supset \overline{\Omega}_n$ et $\omega_n = \Omega_n - \overline{D}_0^r$. La plus petite majorante harmonique considérée est la limite de $H_v^{\omega_n}$, égale à $H_{(0,v)}^{\omega_n} + H_{(v,0)}^{\omega_n}$. Le premier terme tend vers $H_{(0,v)}^\omega$ (voir lemme 10), le second vaut dans ω_n, $H_v^{\Omega_n} - H_{(0, H_v^{\Omega_n})}^{\omega_n}$; la première partie tend vers 0, uniformément localement donc aussi la seconde, ce qui achève d'établir la propriété annoncée : alors

$$v(M) = \int_\omega G_\omega(M, P) d\mu_P + H_{(0,v)}^\omega(M) \tag{14}$$

(G_ω fonction de Green de ω).

Fixons d'abord M pour simplifier et étudions le passage à la limite pour $r \to 0$.

Posons au voisinage de O : $G(O, P) = h(OP) - \gamma + \Theta(P)$ avec $|\Theta(P)| < \delta . OP$, γ et δ étant des constantes. Alors $v(P)$ et $\mathfrak{M}_v^r \dfrac{G(OP)}{h(r) - \gamma}$ ont sur Σ_0^r la même moyenne $\mathfrak{M}_v^r$ et les moyennes des

[27] Et en même temps, d'ailleurs, par rapport à Ω contenant au voisinage fixé de O et variant dans un Ω fixe du même type.

[28] Ou encore α/φ_τ où α est un flux convenablement défini à la frontière.

modules sont $\mathfrak{M}^r_{|v|}$ et $|\mathfrak{M}^r_v|$ Comme $r^{\tau-1}\mathfrak{M}^r_{|v|} \to 0$ de même que $r^{\tau-1}\mathfrak{M}^r_{|u|}$, le lemme 8 donne

$$H^{\omega}_{(0,\,v)}(M) = \frac{\mathfrak{M}^r_v}{h(r)-\gamma} G(O,\ M) + o(1).$$

D'autre part :

$$\int_{\omega} G_{\omega}(M,\ P)d\mu_P = \int_{\Omega - D^R_O} G_{\omega}(M,\ P)d\mu_P$$
$$+ \int_{C^{r,\,R}_O} G(M,\ P)d\mu_P - \int_{C^{r,\,R}_O} H^{\omega}_{(0,\,G(M,\,Q))}(P)d\mu_P.$$

Le premier terme à droite tend vers $\int_{\Omega - D^R_O} G(M,\ P)d\mu_P$ (29).

Puis on voit aisément que $G(M,\ P)$ et $\dfrac{G(M,\ O)}{h(r)-\gamma}G(O,\ P)$ diffèrent sur Σ^r_O d'un $O(r)$. donc aussi $H^{\omega}_{(0,\,G(M,\,Q))}(P)$ et $\dfrac{G(M,\ O)}{h(r)-\gamma}G(O,\ P)$ dans ω ; et les intégrales -$d\mu_P$ de ces dernières fonctions dans $C^{r,\,R}_O$ diffèreront d'un $o(1)$ puisque $r\mu(C^{r,\,R}_O) \to 0$. Ainsi :

$$(15)\qquad v(M) = \int_{\Omega - D^R_O} G(M, P)d\mu_P + \int_{C^{r,\,R}_O} G(M, P)d\mu_P$$
$$+ \frac{G(O, M)}{h(r)-\gamma}\left[\mathfrak{M}^r_v - \int_{C^{r,\,R}_O} G(O, P)d\mu_P\right] + o(1).$$

Comme $\left|\int_{C^{r,\,R}_O} \Theta(P)d\mu_P\right| \leqslant \delta \int_{C^{r,\,R}_O} OP\,d\mu_P$, on aura par les lemmes 4 B et 2 B

$$\frac{1}{h(r)-\gamma}\int_{C^{r,\,R}_O} \Theta(P)d\mu_P \to 0$$

donc

$$\frac{G(O, M)}{h(r)-\gamma}\int_{C^{r,\,R}_O} G(O, P)d\mu_P = G(M, O)\int_{C^{r,\,R}_O} d\mu_P$$
$$+ \frac{G(O, M)}{h(r)-\gamma}\int_{C^{r,\,R}_O} [h(OP) - h(r)]d\mu_P + o(1).$$

(29) Car G_ω tend en croissant vers G qui est comme G_ω sommable -μ_P sur $\Omega - D^R_O$ parce que G/G_ω est borné au voisinage de $\overset{*}{\Omega}$ (puisqu'il l'est sur Σ^R_O).

Or en introduisant la variable t ou $t_\rho = h(\rho)$ et $\mathfrak{M}_v^\rho = y(t)$

$$\int_{C_O^{r,R}} [h(OP) - h(r)]\, d\mu_P = \int_{]r,R[} [h(\rho) - h(r)]\, d\mu(C_O^{r,\rho})$$
$$= -\int_{]t_R, t_r[} (t - t_r)\, dy_t'^{-} = (t_R - t_r)\, y_t'^{+}(t_R) + \mathfrak{M}_v^r - \mathfrak{M}_v^R.$$

Finalement :

(16)
$$v(M) - \int_{\Omega - D_O^R} G(M, P)\, d\mu_P - \int_{C_O^{r,R}} [G(M, P) - G(M, O)]\, d\mu_P$$
$$= \frac{G(O, M)}{h(r) - \gamma} \Big[\big(h(r) - h(R)\big) y_t'^{+}(t_R) + \mathfrak{M}_v^R \Big] + o(1)$$

d'où le résultat (13) grâce à l'interprétation de $y_t'^{+}$.

L'examen des diverses approximations montre que les $o(1)$ introduits sont majorés en module par des $o(1)$ indépendants de M hors d'un voisinage fixé de O (et même aussi de Ω variant comme dans la note 27).

D'où la convergence annoncée de $\int_{C_O^{r,\rho}} [G(M, P) - G(M, O)]\, d\mu_P$ en commençant par écarter les points où u est infini et complétant par continuité.

Si maintenant on prend pour Ω un $D_O^{R_0}$, on voit que la fonction de P, G(M, P) pour M fixé $\neq$ O admet en O un gradient non nul de direction OM, ce qui permet de réaliser au voisinage de O, avec $G(M, P) - G(M, O)$, à un facteur constant près, et à la différence près d'un $O(\overline{OP}^2)$, toute fonction linéaire $\varphi(P)$ nulle en O. D'où la propriété de $\int_{C_O^{r,\rho}}$ qui restait à établir dans le paragraphe B après le chapitre précédent.

La propriété analogue dans A s'obtiendra en reprenant tout le raisonnement à partir de l'hypothèse A, et remplaçant les $o(1)$ par des $O(1)$.

Théorème 3'. — I. *Soit u sous-harmonique au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ point exclu, μ la mesure ≤ 0 associée, et r variable.*

A) *Si $\mathfrak{M}_{u^+}^r(O) = O(r)$ $(r \to \infty)$, ce qui est indépendant du point* O. *alors $\mu(C_O^{R,r}) = O(r^{\tau-1})$. $\overline{OM}^{-(\tau-1+\alpha)}$ $(\alpha > 0)$ est sommable -μ au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ et pour toute fonction linéaire φ, $\int_{C_O^{R,r}} \frac{\varphi(P)}{\overline{OP}^\tau}\, d\mu$ pour* R *fixé assez grand est borné indépendamment de r (et même de* O *variant*

dans un ensemble borné, et aussi de φ *à coefficients bornés) ; cela permet la représentation intégrale signalée fin n° 14 et donne*

$$u^+(M) = O(OM).$$

B) *Si* $\mathfrak{M}_{u^+}^r(O) = o(r)$ $(r \to \infty)$ *ce qui est indépendant de* O. *alors* $\mu(C_O^{R,r}) = o(r^{\tau-1})$ et $\int_{C_O^{r,\rho}} \frac{\varphi(P)}{\overline{OP}^\tau} d\mu_P \to 0$ *avec* $1/r$ *uniformément en* $\rho > r$ *(et par rapport à* O *et* φ *comme plus haut), d'où la représentation intégrale indiquée fin n° 14 et*

$$u^+(M) = o(OM).$$

Si $\frac{1}{r^2}\mathfrak{M}_{u^+}^r(O)$ *est sommable en r au voisinage de l'infini (ce qui est indépendant de* O) *l'hypothèse* B *est satisfaite,* $\overline{OP}^{-(\tau-1)}$ *est sommable -*μ *à l'infini et on a la représentation avec intégrale de Radon du théorème 2'.*

II. *On précisera comme suit la représentation intégrale des cas* B *et* C *:*

Soit dans $\overline{R}^\tau$ *un domaine* Ω ($\complement\Omega$ *non polaire et fonction de Green* $G_\Omega(M, P)$ *ou seulement* G) *contenant* $\mathcal{R}_\tau$. *u sous-harmonique dans* $\Omega - \mathcal{R}_\tau$, *majorable au voisinage de* $\overset{*}{\Omega}$ *par une fonction harmonique, enfin de mesure associée* μ. O *étant fixé avec* $\overline{\Delta}_O^R \subset \Omega$, *on a dans l'hypothèse* B :

$$(13') \quad u(M) = \mathcal{D}_u^\Omega(M) + \int_{\Omega - \Delta_O'^R} G(M, P) d\mu_P$$
$$+ \lim_{r \to \infty} \int_{C_O^{R,r}} [G(M, P) - G(M, \mathcal{R}_\tau)] d\mu_P + \frac{\alpha'_R}{\varphi_\tau} G(\mathcal{R}_\tau, M).$$

α'_R *y désigne le flux de u à travers* Σ_O^R, *défini du côté de* Δ_O^R *avec orientation vers* Δ_O^R, *ou encore, si on modifie u dans un* $\Delta_O'^r (r > R)$ *de façon à le rendre égal presque partout dans* Δ_O^R *à la différence de deux fonctions sous-harmoniques dans* $\Delta_O'^R$. $\frac{\alpha'_R}{\varphi_\tau}$ *vaut la masse totale associée dans* $\Delta_O'^R$ *à cette différence.*

De plus $\int_{C_O^{\rho,r}} [G(M, P) - G(M, \mathcal{R}_\tau)] d\mu_P$

et sa limite pour $r \to \infty$ *tendant vers* 0 *avec* $1/\rho$ *uniformément en* M *et* O *sur des ensembles bornés* (30).

(30) Et en même temps par rapport à $\overset{*}{\Omega}$, contenant un voisinage fixe de $\mathcal{R}_\tau$ et variant dans un Ω fixé du même type.

Si la mesure μ *d'un voisinage de* $\overset{*}{\Omega}$ *est finie, on peut remplacer les deux intégrales par*

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\Omega - \Delta_O'^r} [G(M, P) - G(M, O)] d\mu_P$$

en prenant comme coefficient de $G(\mathcal{R}_\tau, M)$ *la masse totale associée à* u *modifiée comme précédemment.*

Enfin, si on remplace l'hypothèse B *par* C, *la limite d'intégrale est une intégrale de Radon sur* Δ_O^R *ou* $\Omega - \mathcal{R}_\tau$.

A partir des énoncés A, B, C du théorème 3, on obtient aussitôt par *inversion* les énoncés correspondants du théorème 3'. l'invariance en O venant du lemme 4' D ; le passage de (13) à (13') est immédiat aussi pour $\tau = 2$ mais présente des difficultés pour le cas de $\tau > 2$ que nous allons examiner.

Prenons d'abord O extérieur à Ω ou sur sa frontière : soit Ω' l'inverse de Ω et passons de u donnée à sa transformée

$$v(M') = u(M)/\overline{OM'}^{\tau-2} ;$$

on appliquera à $v(M')$ la représentation (13) et on formera la transformée de Kelvin des divers termes. Pour cela on remarquera que :

$$\frac{G_{\Omega'}(O, M')}{\overline{OM}^{\tau-2}} = \frac{G_\Omega(M, \mathcal{R}_\tau)}{G_\Omega(\mathcal{R}_\tau, \mathcal{R}_\tau)},$$

$$\frac{G_{\Omega'}(M', P')}{\overline{OM}^{\tau-2}\,\overline{OP}^{\tau-2}} = G_\Omega(M, P) - G_\Omega(\mathcal{R}_\tau, P)\frac{G_\Omega(M, \mathcal{R}_\tau)}{G_\Omega(\mathcal{R}_\tau, \mathcal{R}_\tau)},$$

$$\frac{G_{\Omega'}(M', P') - G_{\Omega'}(M', O)}{\overline{OM}^{\tau-2}\,\overline{OP}^{\tau-2}} = G_\Omega(M, P) - G_\Omega(M, \mathcal{R}_\tau) + \frac{G(M, \mathcal{R}_\tau)}{G(\mathcal{R}_\tau, \mathcal{R}_\tau)}\left[G(\mathcal{R}_\tau, \mathcal{R}_\tau) - G(\mathcal{R}_\tau, P) - \frac{1}{\overline{OP}^{\tau-2}}\right].$$

On en déduira que les transformées de Kelvin des termes du développement de $v(M')$ sont justement les termes de droite de (13'). à des facteurs additifs près proportionnels à $G_\Omega(\mathcal{R}_\tau, M)$.

Nous obtenons donc bien le développement (13') à cela près que le coefficient du dernier terme n'est pas précisé, et le plus simple pour achever consiste à montrer que le flux (du type précisé dans l'énoncé) à travers Σ_O^R est nul pour chacun des trois premiers termes.

Si l'on veut enfin la même formule (13) pour O intérieur à Ω, il n'y a qu'à ôter de Ω un D_O^ρ, appliquer la formule pour $\Omega - \overline{D_O^\rho}$ et

passer à la limite pour $\rho \to 0$; cela suppose $M \neq O$ mais il sera facile d'en déduire la validité pour M en O.

Si tout cela présente bien des petites difficultés à examiner, la méthode *directe* adaptée de la démonstration du théorème 3, facile à calquer pas à pas pour $\tau = 2$, présente aussi des difficultés variées pour $\tau > 2$. Si l'on dispose des résultats de I, l'adaptation pourra se faire, non sans quelques complications, pour obtenir (13′) sans donner toutefois directement la valeur du coefficient du dernier terme ; on la trouvera en remarquant comme plus haut que les flux en question des autres termes sont nuls. Sinon, si l'on n'a pas les résultats nouveaux de I (portant sur les fonctions linéaires φ), on supposera d'abord que O est centre harmonique de $C\Omega$, car alors $G_\Omega(\mathcal{R}_\tau, P)$ sera de la forme

$$\gamma - h(OP) + \Theta(P) \qquad \left(\gamma = C^{te}, \Theta(P) = O\left(\overline{OP}^{-\tau}\right)\right)$$

donc sommable-μ_P à l'infini (voir les lemmes 9, 4′ et 2′) ; on pourra adapter le raisonnement puis compléter grâce à cela les résultats de I évidemment indépendants de O ; il n'y aura plus qu'à reprendre avec O quelconque, le premier raisonnement.

16. **Application : théorème de Heins** amélioré et ses analogues. Pour généraliser $h(MP)$, on a introduit (voir AN) la fonction symétrique en M et P, $h_Q(M, P)$ définie pour M et P différents de Q selon les conventions :

$$h_{\mathcal{R}_\tau}(M, P) = h(MP) \quad \text{puis, pour} \quad Q \neq \mathcal{R}_\tau :$$
$$h_Q(M, P) = h(MP) - h(QM) - h(QP) (\text{M et P différents de Q}),$$
$$h_Q(M, \mathcal{R}_\tau) = -h(QM).$$

Cette fonction est harmonique en M dans $\overline{R}^\tau$ hors P et Q et il est immédiat que :

$$(17) \qquad h_Q(M, P) - h_Q(M, S) = h_S(M, P) - h_S(Q, P).$$

Si Ω est un domaine de $\overline{R}^\tau$ (de complémentaire non polaire) on sait que si Q est extérieur (ou encore point-frontière régulier)

$$G_\Omega(M, P) = h_Q(M, P) - \Phi_Q^\Omega(M, P)$$

où

$$\Phi_Q^\Omega(M, P) = H^\Omega_{h_Q(M, I)}(P) = H^\Omega_{h_Q(P, I)}(M)$$

(I étant le point courant sur la frontière $\overset{*}{\Omega}$).

Corollaire *des théorèmes* 3 et 3′. — On appellera S le point singulier à distance finie ou à l'infini.

Soit u sous-harmonique dans $\overline{R^\tau} - S$, *de mesure associée* μ *et satisfaisant à la condition* α *ou* β :

α) Si $S \neq \mathcal{R}_\tau$, $\mathfrak{M}^r_{u^+}(S) = o(r^{-(\tau-1)})$, $r \to 0$

β) Si $S = \mathcal{R}_\tau$, $\mathfrak{M}^r_{u^+}(O) = o(r)$ $\quad$ O quelc., $r \to \infty$.

Alors si u est finie en $Q \neq S$ [31]

$$u(M) = u(Q) + \lim_{r \to 0} \int_{R^\tau - D^r_S} [h_S(M, P) - h_S(Q, P)] d\mu_P \text{ si } S \neq \mathcal{R}_\tau$$

$$u(M) = u(Q) + \lim_{r \to \infty} \int_{D^r_O} [h(MP) - h(QP)] d\mu_P \text{ si } S = \mathcal{R}_\tau, \text{ O quelc.}$$

où les crochets peuvent se transformer par (17).

Supposons Q et S distincts de $\mathcal{R}_\tau$. Isolons Q par D^ρ_Q et soit $\omega_\rho = \overline{R^\tau} - \overline{D}^\rho_Q$.

Si M est distinct de Q et S, on aura pour ρ assez petit :

$$u(M) = \mathfrak{D}^{\omega_\rho}_u(M)$$
$$+ \lim_{r \to 0} \int_{\omega_\rho - D_S} [G_{\omega_\rho}(M, P) - G_{\omega_\rho}(M, S)] d\mu_P + \frac{\alpha_\rho}{\varphi_\tau} G_{\omega_\rho}(S, M)$$

(α_ρ flux à travers Σ^ρ_Q du côté de Δ^ρ_Q avec orientation vers Δ^ρ_Q).

On verra d'abord que $\mathfrak{D}^{\omega_\rho}_u(M) \to u(Q)$ (pour $\rho \to 0$), par exemple en utilisant l'analogue de l'intégrale de Poisson pour Δ'^ρ_Q (Voir AN formule 6) et le fait que $\mathfrak{M}^\rho_u(Q) \to u(Q)$.

Puis on verra facilement que, pour $\rho \to 0$, $G_{\omega_\rho}(S, M) = h(\rho) + O(\rho)$ de sorte que, grâce aux propriétés du flux α_ρ (voir FAS p. 27), $\alpha_\rho G_{\omega_\rho}(S, M) \to 0$. Enfin

$$G_{\omega_\rho}(M, P) - G_{\omega_\rho}(M, S)$$
$$= h_Q(M, P) - h_Q(M, S) - \Phi^{\omega_\rho}_Q(M, P) + \Phi^{\omega_\rho}_Q(M, S)$$

et tout revient à voir que

$$\lim_{r \to 0} \int_{\omega_\rho - D^r_S} [\Phi^{\omega_\rho}_Q(M, P) - \Phi^{\omega_\rho}_Q(M, S)] d\mu_P \text{ tend vers 0 avec } \rho.$$

Or ce nouveau crochet vaut 0 si M est en $\mathcal{R}_\tau$, sinon vaut la différence en P et S des valeurs de la fonction de N, $H^{\omega_\rho}_{h(MN)}(N)$ (I point

(31) Cela implique que Q ne porte pas de masse s'il est $\neq \mathcal{R}_\tau$ ou si $\tau = 2$, ce qui permet alors d'ôter Q du champ d'intégration. Si Q est en $\mathcal{R}_\tau$ ($\tau > 2$), le théorème subsiste avec une variante de démonstration, la formule (17) se prolongeant d'ailleurs alors conventionnellement facilement pour P, Q (et même M) en $\mathcal{R}_\tau$.

courant sur Σ_Q^ρ), ce qui est un $o(\rho)$ indépendant de P. On achèvera en décomposant notre limite d'intégrale en $\int_{\omega_\rho - D_S^{r_0}} + \lim_{r \to 0} . \int_{C_S^{r, r_0}}$; le second terme est un $o(r_0)$ indépendant de ρ parce que les dérivées premières et secondes de $H_{h(M_1)}^{\omega_\rho}(N)$ sont des $O(\rho)$ (et même $o(\rho)$), au voisinage de S.

Démonstration analogue dans les autres cas.

(Manuscrit reçu en janvier 1950.)

SUR LA REDUCTION A UN PRINCIPE VARIATIONNEL DES EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX INCOMPRESSIBLE

par **R. GERBER** (Grenoble).

---

1. On sait qu'il n'est pas possible par la considération du champ des vitesses à un instant, d'opérer dans le cas général la réduction à un principe variationnel des équations du mouvement non lent d'un fluide visqueux incompressible (¹).

Il semble intéressant de voir si un tel principe ne pourrait pas être obtenu en envisageant non plus le fluide à une époque, mais en suivant une certaine masse $\mathcal{M}$ dans son mouvement.

Ayant défini un ensemble $\mathcal{E}$ de mouvements virtuels de $\mathcal{M}$ entre deux instants t_0 et t_1 on tentera de construire une fonction $\mathfrak{L}$, définie sur $\mathcal{E}$, et telle que $\int_{t_0}^{t_1} \overline{\mathfrak{L}dt}$ soit stationnaire pour tout élément de $\mathcal{E}$ qui vérifie les équations indéfinies du mouvement.

On montrera qu'on aboutit également dans cette voie à un résultat négatif pour le cas général, du moins si on se limite à une certaine classe de fonctions $\mathfrak{L}$.

De plus la méthode suivie nous conduira à exprimer avec les variables de Lagrange les équations de Navier pour un fluide visqueux incompressible et on indiquera une méthode rapide pour obtenir ces équations.

2. Soit un mouvement réel d'une masse $\mathcal{M}$ du fluide entre les époques t_0 et t_1, correspondant à certaines conditions initiales et aux limites et sous l'action de forces extérieures dépendant d'un potentiel. Notons $\mathfrak{D}_t$ le domaine occupé à l'instant t, Σ_t sa frontière (on pourra supprimer l'indice t) ; $\mathfrak{D}_0$ et Σ_0 pour $\mathfrak{D}_{t_0}$ et Σ_{t_0}. En particulier Σ pourra

(¹) Voir H. Villat. *Leçons sur les fluides visqueux*, p. 103.

être la paroi d'un vase déformable ou non, de volume constant enfermant le fluide. Supposons le mouvement de Σ donné. On considèrera l'ensemble des mouvements virtuels de $\mathcal{M}$ entre t_0 et t_1 : 1° compatibles avec la condition d'incompressibilité; 2° qui sont continus et pour lesquels si Σ est une paroi limitant le fluide il y a adhérence à cette paroi; 3° tels que les positions et les vitesses des éléments fluides pour t_0 et t_1 sont les mêmes que dans le mouvement réel.

D'une façon précise, l'espace étant rapporté à des axes rectangulaires $Ox_1x_2x_3$, $\mathcal{E}$ sera constitué par les fonctions vectorielles continues :

$$(1) \quad OM = f(P, t)\big(P(a_1, a_2, a_3) \in \mathfrak{D}_0 + \Sigma_0 ; \quad M(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{D} + \Sigma ;\ t \in [t_0, t_1]\big)$$

satisfaisant à :

$$a) \qquad \Delta \equiv \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = 1$$

(2) *b*) f se réduit à une fonction donnée de P et de t pour :

$$P \in \Sigma_0.$$

c) f et $\frac{\partial f}{\partial t}$ se réduisent à des fonctions données de P pour $t = t_0$ et $t = t_1$.

On notera $V(u_1, u_2, u_3)$ le vecteur $\frac{\partial f}{\partial t}$. Les x_i sont les variables d'Euler et les a_i les variables de Lagrange.

3. Par analogie avec le principe d'Hamilton on fera figurer dans $\mathfrak{L}$ l'expression $\mathfrak{T} + \mathfrak{U}$ où :

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{D}_0} \rho V^2 d\tau_0$$

(ρ, densité, est une constante).

$$\mathfrak{U} = \int_{\mathfrak{D}_0} \rho U d\tau_0$$

(U, fonction donnée de M, potentiel des forces extérieures).

On sait le rôle joué dans le cas des mouvements lents par la fonction de dissipation ψ définie en variables d'Euler par :

$$(3) \qquad \psi(V) = \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2$$

L'intégrale $\mu \int_{\mathfrak{D}} 2\psi d\tau$ (où μ est le coefficient de viscosité) représente la chaleur dissipée par unité de temps et à l'instant t par effet de viscosité. On introduira dans $\mathfrak{L}$ la quantité :

$$(4) \qquad Q(t) = \int_{t_0}^{t} dt \mu \int_{\mathfrak{D}} 2\psi d\tau$$

qui représente la chaleur ainsi dissipée dans la masse $\mathfrak{M}$ entre t_0 et t_1 et qui est homogène à l'expression $\mathfrak{T} + \mathfrak{U}$.

Enfin les fonctions $x_i(a_1, a_2, a_3, t)$ étant liées par (2, a) on fera figurer dans $\mathfrak{L}$ l'expression Δ au moyen d'un multiplicateur λ, fonction indéterminée des x_i.

On prendra donc $\mathfrak{L}$ sous la forme :

$$(5) \quad \mathfrak{L} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathfrak{T} + \mathfrak{U} + \alpha Q + \int_{\mathfrak{D}_0} \lambda \Delta d\tau_0 \right) dt$$

(α facteur numérique) ou

$$(6) \quad \mathfrak{L} = \int_{\mathfrak{D}_0} d\tau_0 \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho U + \lambda \Delta + 2\alpha\mu \int_{t_0}^{t} \psi dt \right).$$

4. La fonction ψ définie par (3) en variables d'Euler est supposée exprimée dans cette formule (6) avec les variables de Lagrange. Pour faire ce changement de variables on remarque que g étant une fonction des x_i ou des a_i qui sont liés par (1) on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{D(g, x_2, x_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \frac{D(g, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} \qquad \left(\text{en vertu de } \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = 1 \right)$$

et les expressions obtenues par permutations circulaires pour

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x_3}.$$

Alors :

$$(7) \qquad \Psi = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \frac{1}{2}(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)$$

avec :

$$A_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{D\left(\frac{\partial x_1}{dt}, x_2, x_3\right)}{D(a_1, a_2, a_3)}$$

$$(8) \quad B_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{D\left(x_1, x_2, \frac{\partial x_2}{\partial t}\right)}{D(a_1, a_2, a_3)} + \frac{D\left(x_1, \frac{\partial x_3}{\partial t}, x_3\right)}{D(a_1, a_2, a_3)}$$

et les expressions analogues obtenues par permutations pour A_2, A_3, B_2, B_3.

Les formules (7) et (8) montrent que Ψ se présente en variables de Lagrange comme une fonction des $\frac{\partial x_i}{\partial a_j}$ et des $\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial a_j}$. Il s'introduira donc dans le calcul de la variation des expressions :

$$X_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right)}, \qquad Y_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial a_j}\right)}.$$

Explicitons le calcul de Y_1 ; on a :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial a_1}\right)} = 2A_1 \frac{D(x_2, x_3)}{D(a_2, a_3)} + B_2 \frac{D(x_1, x_2)}{D(a_2, a_3)} - B_3 \frac{D(x_1, x_3)}{D(a_2, a_3)}$$

et les deux égalités déduites de celle-ci par permutations circulaires sur les a_i dans les deux membres.

On trouve alors :

$$\begin{aligned} Y_1 &= 2\frac{D(A_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} + \frac{D(B_2, x_1, x_2)}{D(a_1, a_2, a_3)} - \frac{D(B_3, x_1, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} \\ &= 2\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_3} + \frac{\partial B_3}{\partial x_2} \end{aligned}$$

ou compte tenu de (8) et de $\sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ traduisant l'incompressibilité :

$$(10) \qquad Y_1 = \Delta u_1$$

(étant le Laplacien par rapport aux x_i).

On aurait dit de même :

$$(11) \qquad Y_i = \Delta u_i.$$

Le calcul des X_i ne présente pas de difficulté mais conduit à des expressions assez longues. Par exemple sans expliciter les jacobiens :

$$(12) \quad \begin{aligned} X_1 = 2\frac{D(A_2, u_2)}{D(x_1, x_2)} &+ 2\frac{D(A_3, u_2)}{D(x_1, x_3)} + \frac{D(B_1, u_3)}{D(x_1, x_2)} \\ &+ \frac{D(B_1, u_2)}{D(x_1, x_3)} + \frac{D(B_2, u_2)}{D(x_1, x_3)} + \frac{D(B_3, u_1)}{D(x_1, x_2)}. \end{aligned}$$

5. Passons au calcul de la variation $\delta\mathfrak{L}$ due à une variation

$\delta f(\delta x_1, \delta x_2, dx_3)$. Cette variation δf vérifie les conditions aux limites :

$$(13)\quad \delta f \equiv 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial t}\delta f \equiv 0 \text{ pour } t = t_0 \text{ et } t = t_1 \,;\; \delta f \equiv 0 \text{ pour } \mathrm{P} \in \Sigma_0.$$

$\mathfrak{L}$ étant donnée par (5) on a :

$$(14)\quad \delta\mathfrak{L} = \int_{\mathfrak{D}_0} d\tau_0 \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_i \Bigg\{ \rho \frac{\partial x_i}{\partial t}\,\delta\!\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right) + \rho\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\delta x_i$$
$$+ 2\alpha\mu \int_{t_0}^{t} \sum_j \left(\frac{\partial \Psi}{\partial\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right)}\,\delta\!\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial a_j}\right)}\,\delta\!\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\partial a_j}\right) \right) dt \Bigg\}$$

ou après des intégrations par parties et compte tenu des relations (13) :

$$(15)\quad \delta\mathfrak{L} = \int_{\mathfrak{D}_0} d\tau_0 \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_i \Bigg\{ \left(-\rho\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} + \rho\frac{\partial \mathrm{U}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial\lambda}{\partial x_i} + 2\alpha\mu \mathrm{Y}_i \right)\delta x_i$$
$$+ \int_{t_0}^{t} 2\alpha\mu\left(-\frac{\partial \mathrm{Y}_i}{\partial t} + \mathrm{X}_i \right)\delta x_i\, dt \Bigg\}.$$

En se reportant à l'expression (11) de Y_i en variables d'Euler on constate que la première parenthèse, quand on y fait $\lambda = -p$, $\alpha = \frac{1}{2}$ représente la composante suivant $\mathrm{O}x_i$ du premier membre de l'équation indéfinie du mouvement d'un fluide visqueux incompressible :

$$-\rho\gamma + \operatorname{grad}(\rho\mathrm{U} - p) + \mu\Delta\mathrm{V} = 0.$$

Ainsi pour un élément de $\mathcal{E}$ vérifiant l'équation indéfinie du mouvement $\delta\mathfrak{L}$ se réduit à :

$$(16)\qquad \delta\mathfrak{L} = \int_{\mathfrak{D}_0} d\tau_0 \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0}^{t} \sum_i \mu\left(-\frac{\partial \mathrm{Y}_i}{\partial t} + \mathrm{X}_i \right)\delta x_i\, dt$$

où les variations δx_i s'annulent pour $\mathrm{P} \in \Sigma_0$ et pour $t = t_0$ ou $t = t_1$ et sont liées entre elles par :

$$(17)\qquad \delta\frac{\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3)}{\mathrm{D}(a_1, a_2, a_3)} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i \equiv 0.$$

Compte tenu de cette relation (17) et des expressions (11) et (12) des X_i et Y_i, on peut voir que cette forme (16) de $\delta\mathfrak{L}$ ne doit pas être nulle dans le cas général.

Ainsi on vérifiera sur l'exemple suivant que $\delta\mathfrak{L}$ ne s'annule pas :

mouvement réel plan non permanent à trajectoires rectilignes donné par :

$$(18) \qquad u_1 = e^{x_2+t}, \quad u_2 = 0 \quad \text{ou} \quad x_1 = a_1 + e^{a_2+t} - e^{a_2}, \quad x_2 = a_2$$

(les équations indéfinies du mouvement sont satisfaites si $\mu = \rho$, et avec $p - \rho U =$ constante).

Supposons : $\mathfrak{D}_0$ défini par : $0 \leqslant a_1 \leqslant 1$; $0 \leqslant a_2 \leqslant 1$; $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$.

Prenons pour variation $\delta f(\delta x_1, \delta x_2)$:

$$(19) \qquad \delta x_1 = t(1-t)\frac{D(x_1, \Phi^2)}{D(a_1, a_2)};$$

$$\delta x_2 = -t(1-t)\frac{D(\Phi^2 . x_2)}{D(a_1 . a_2)} \qquad \text{avec} \qquad \Phi = a_1 a_2 (1-a_1)(1-a_2)$$

qui satisfait à (13) et (17).

Dans l'intégrale (16) ne figure, compte tenu de la forme des u_i, que le terme $-\frac{\partial Y_1}{\partial t}\delta x_1 = -\frac{\partial u_1}{\partial t} . \delta x_1$ et on s'assure que cette intégrale est non nulle.

Enfin, il pourra se faire que pour certains mouvements particuliers $\delta \mathfrak{L}$ s'annule ; par exemple si les X_i et $\frac{\partial Y_1}{\partial t}$ sont identiquement nuls, ce qui serait le cas pour un mouvement à la Poiseuille :

$$u_1 \equiv u_1(x_2, x_3) \qquad u_2 \equiv u_3 \equiv 0.$$

PREUVES EXPÉRIMENTALES DU FERRIMAGNÉTISME ET DE L'ANTIFERROMAGNÉTISME

par Louis NÉEL.

SOMMAIRE

Après avoir précisé la structure cristalline des ferrites et rappelé les hypothèses fondamentales qui forment la base de la théorie des propriétés magnétiques de ces subtances, proposée en 1948 par l'auteur, on expose une série de résultats expérimentaux récents qui viennent à l'appui de la théorie. Les premiers se rapportent à la prédiction du moment moléculaire à saturation des ferrites purs : on montre que les écarts avec la théorie proviennent de l'intervention du moment orbital. On étudie le passage des ferrites normaux et inverses à l'état statistique et on applique les résultats au ferrite de cuivre. On donne l'interprétation des variations avec la concentration du moment moléculaire à saturation des ferrites mixtes contenant du zinc et on étudie le rôle des fluctuations du champ moléculaire. On montre comment l'extension à ces substances de la théorie du champ moléculaire permet de décrire d'une manière approchée les variations thermiques de l'aimantation spontanée et de la susceptibilité magnétique au-dessus du point de Curie et on rappelle le rôle éventuel de la variation thermique du champ moléculaire.

Après avoir remarqué que les intégrales d'échange sont toutes *négatives* dans les ferrites, on montre que la structure magnétique atomique de ces corps les rapproche plus des antiferromagnétiques que des ferromagnétiques ordinaires métalliques et on propose de les ranger dans une classe spéciale : celle des *ferrimagnétiques*. On cite des expériences récentes, par diffraction de neutrons, qui

apportent une preuve directe de la décomposition du réseau des antiferromagnétiques en deux sous-réseaux à aimantations spontanées opposées, proposée depuis longtemps par l'auteur à la base de sa théorie de l'antiferromagnétisme.

Enfin, on passe en revue les différents arguments en faveur de l'existence dans les antiferromagnétiques et dans les ferrimagnétiques d'interactions d'échange indirectes, du type superéchange, par l'intermédiaire des atomes d'oxygène : on cite l'exemple crucial du sesquioxyde de fer rhomboèdrique dont la structure magnétique atomique est prévue entièrement différente, selon qu'il existe ou non des interactions indirectes d'échange. La structure autrefois proposée par l'auteur, admettant l'existence de ces interactions indirectes, est précisément celle qui vient d'être trouvée par diffraction de neutrons.

1. **Les ferrites et leur réseau cristallin.**

Les ferrites Fe_2O_3MO, à structure de spinelle, où M est un métal bivalent, se rangent, suivant leurs propriétés magnétiques en deux catégories : celle des ferrites paramagnétiques, comprenant les ferrites de zinc et de cadmium, et celle des ferrites ferromagnétiques, comme les ferrites de manganèse, cobalt, nickel, etc... Ces derniers, comme l'a fait ressortir J. L. Snoek [1], présentent un grand intérêt industriel car ce sont des ferromagnétiques isolants électriques, mais leur intérêt théorique n'est pas moindre étant donné leurs curieuses propriétés : leur moment moléculaire à saturation, de 1 à 5 μ_B (μ_B = magnéton de Bohr), est beaucoup plus faible que le moment résultant des ions magnétiques contenus dans la molécule qui varie de 10 à 15 μ_B. De même, au-dessus du point de Curie, la variation thermique de l'inverse de la susceptibilité magnétique, étudiée par A. Serres [2], possède une allure hyperbolique assez extraordinaire, avec concavité dirigée vers l'axe des T et asymptote s'extrapolant vers une température absolue négative, qui la différencie nettement de celle des ferromagnétiques ordinaires, dont l'allure est rectiligne conformément à la loi de Curie-Weiss, avec une faible convexité vers l'axe des T, au voisinage du point de Curie.

Dans le réseau cristallin de ces spinelles, les ions d'oxygène forment sensiblement un empilement cubique compact dans les interstices duquel les ions métalliques peuvent occuper des emplacements appartenant à deux catégories différentes : les sites tétraèdriques, ou sites A, entourés de quatre atomes d'oxygène, et les sites octaèdriques, ou sites B, entourés de six atomes d'oxygène : on compte, par molécule, 1 site A et 2 sites B. Dans les *ferrites normaux*, les deux ions Fe^{+++} occupent les sites B tandis que l'ion M^{++} occupe le site A. Cependant, Barth et Posnjack [3] ont montré qu'il existait aussi des *ferrites inverses* dans lesquels c'est un ion Fe^{+++} qui occupe le site A tandis que l'ion Fe^{+++} restant et l'ion M occupent les deux sites B. De l'étude aux rayons X des

ferrites de Zn, Cd, Mg, Cu. VERWEY et HEILMANN [4] ont conclu que les ferrites ferromagnétiques sont des ferrites inverses tandis que les ferrites paramagnétiques sont des ferrites normaux.

2. Interprétation des propriétés magnétiques. Hypothèse fondamentale.

Pour interpréter les propriétés magnétiques de ces corps, nous avons supposé [5] que les principales interactions magnétiques d'échange se produisent entre les ions placés sur les sites A et les ions placés sur les sites B et que ces interactions, dites interactions AB, sont *essentiellement négatives*. En fait, il existe aussi des interactions AA entre les ions placés sur les sites A, et des interactions BB entre les ions placés sur les sites B, mais comme nous le verrons plus tard, elles sont nettement plus faibles et en général également négatives. L'existence de fortes interactions négatives AB oblige, au voisinage du zéro absolu, les moments magnétiques des ions situés en A à s'aligner parallèlement entre eux pour donner une résultante M_{as} dirigée en sens inverse de la résultante M_{bs} des moments magnétiques des ions situés en B, qui, eux aussi, sont tous parallèles entre eux. On observe ainsi une aimantation spontanée résultante dont la valeur M_s est égale à la différence $M_{bs} - M_{as}$. Comme, dans un ferrite inverse, les deux ions Fe^{+++} sont situés l'un en A, l'autre en B, leurs moments magnétiques sont orientés en sens inverse et se détruisent, de sorte que le moment moléculaire observé est simplement égal au moment magnétique m de l'ion M^{++}.

3. Le moment moléculaire à saturation des ferrites purs.

Le matériel expérimental dont on disposait au moment de la publication de cette théorie était assez maigre et il n'y avait guère que la magnétite qui permît de vérifier les prédictions théoriques de la valeur du moment à saturation. Depuis, de nombreuses expériences ont été entreprises indépendamment dans différents laboratoires pour vérifier ce point [6]. Les cercles noirs de la figure 1 indiquent les moments moléculaires à saturation des ferrites de Mn, Fe, Co, Ni, Cu d'après les déterminations de WEISS et FORRER [7], E. W. GORTER [8] à Eindhoven, C. GUILLAUD [9] à Bellevue, L. WEIL, L. BOCHIROL et R. PAUTHENET [10] à Grenoble. La précision est d'ailleurs bonne : c'est ainsi que pour le ferrite de

nickel les valeurs obtenues concordent à un pour cent près pour des échantillons préparés et étudiés dans trois laboratoires différents, par des méthodes différentes. Du point de vue théorique, si l'on admet que le moment orbital est bloqué par le champ électrique cristallin, M_s doit varier de $5\mu_B$ pour Mn jusqu'à o pour Zn, comme

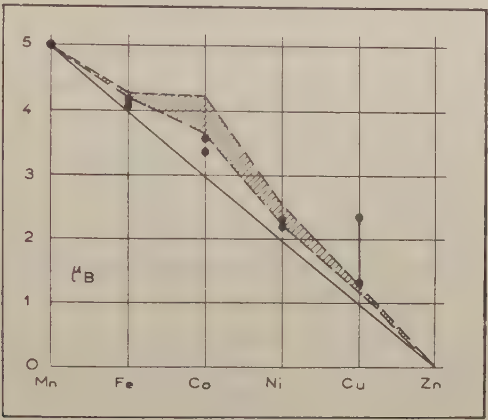


Fig. 1.

le représente la droite en trait plein de la figure 1. Remarquons d'abord que cette droite théorique donne bien l'allure générale des résultats expérimentaux, mais cependant les moments magnétiques observés sont systématiquement plus grands que les moments calculés.

4. Le rôle du moment orbital.

L'origine de ce désaccord doit être probablement recherchée dans l'influence du moment orbital. D'une part en effet, en ce qui concerne l'ion Mn^{+++} qui est dans un état *s*, le moment magnétique prévu ($5\mu_B$) est égal au moment expérimental ; d'autre part, les mesures de résonance magnétique, de Bickford [11] pour la magnétite, de Beljers et Polder [12] sur le ferrite de nickel, donnent des valeurs de g supérieures à 2 et mettent en évidence l'intervention du moment orbital. Pour obtenir une idée grossière des augmentations du moment magnétique m à attendre de ce chef, j'ai interprété les valeurs des constantes de Curie C des sels de Fe^{++}, Co^{++}, Ni^{++}, Cu^{++}, telles qu'elles ont été rassemblées par

G. Foëx [13], comme étant dues au mélange dans le sel d'une proportion x convenable d'ions à orbites bloquées avec

$$C = 4\mu_B^2 S(S+1) : 3R$$

et $1-x$ d'ions à orbites libres, à multiplet large, avec

$$C = g^2 \mu_B^2 J(J+1) : 3R.$$

Chaque sel paramagnétique fournit ainsi une certaine valeur de x à partir de laquelle on peut calculer le moment ferromagnétique correspondant par la formule $m = [2Sx + (1-x)(2S+L)]\mu_B$. Suivant les sels, on obtient ainsi des moments différents, mais situés dans la région hachurée de la figure 1. On remarque que les moments à saturation des ferrites correspondent avec assez de précision aux moments des sels dans lesquels le moment orbital est le plus énergiquement bloqué. L'explication proposée paraît donc très vraisemblable.

5. Le cas du ferrite de cuivre [6].

Il reste à examiner le cas du ferrite de cuivre pour lequel la figure 1 donne deux valeurs expérimentales du moment, l'une de 1,37 μ_B relative à un ferrite longtemps recuit à 300° C, l'autre de 2,36 μ_B relative à un ferrite trempé depuis 1 000° C. Pour expliquer ce phénomène, remarquons d'abord que la nature, normale ou inverse, d'un ferrite dépend de l'affinité de l'ion M pour les sites A ou les sites B. Cette affinité peut se définir par la valeur w de l'énergie à dépenser pour faire passer un ion M d'un site B à un site A, ce passage étant naturellement accompagné du passage en sens inverse d'un ion Fe^{+++} d'un site A à un site B. Si, pour simplifier, nous supposons que, pour n molécules, tous les arrangements possibles des n ions M sur les n sites A et les $2n$ sites B disponibles soient également probables à priori, l'application de la statistique de Boltzmann permet de calculer à chaque température la répartition la plus probable, c'est-à-dire la répartition d'équilibre. Soit y et $1-y$ les proportions des ions M situés sur les sites A et les sites B, on trouve

$$\frac{y(1+y)}{(1-y)^2} = e^{-\frac{w}{kT}}. \qquad (1)$$

A une valeur négative de w correspond au zéro absolu un ferrite

normal ($y=1$) et à une valeur positive de w correspond un ferrite inverse ($y=0$).

Ceci posé, dans la série Mn, Fe, Co, Ni, Cu, Zn, où les ions M sont rangés par numéros atomiques croissants, les 5 premiers ferrites sont inverses tandis que le dernier est normal. Il est donc logique de penser que w d'abord positif pour le manganèse décroisse régulièrement à mesure que le numéro atomique augmente pour devenir négatif avec le zinc. L'énergie w du cuivre, encore positive, doit donc être particulièrement petite. Lorsque w/k est supérieur à 6 ou 7 000 degrés, les valeurs de y, correspondant aux températures accessibles dans les expériences, restent pratiquement nulles : c'est ce qui doit se produire pour Mn, Fe, Co, Ni. Au contraire, si w/k est faible, de l'ordre de 1 000 degrés, comme ce doit être le cas du cuivre, on obtient à haute température des valeurs de y de l'ordre de quelques dixièmes : une telle répartition des ions peut être conservée en faux équilibre à basse température, au moyen d'une trempe énergique. Le moment moléculaire à saturation M_s est alors une fonction de y donnée par

$$M_s = [m + 2y(5 - m)]\mu_B. \tag{2}$$

Connaissant M_s, on peut ainsi calculer y et, en supposant que cette valeur corresponde à la répartition d'équilibre à la température T, à partir de laquelle la trempe a été faite, on peut calculer la valeur de w/k. Si la théorie est correcte on doit retrouver les mêmes valeurs de w/k, pour différentes valeurs de la température de trempe. Le tableau I résume les résultats obtenus d'après les expériences de L. Weil, L. Bochirol et R. Pauthenet [10] ; des résultats du même ordre ont été obtenus par E. W. Gorter [8]. Effectivement, on obtient des valeurs de w/k sensiblement constantes et voisines de 1 600°. Il semble donc que les variations du moment à saturation du ferrite de cuivre, en fonction du traitement thermique, reçoivent de la sorte une interprétation satisfaisante.

TABLEAU I

T°C	300	400	600	695	800	850	900	995
μ.	1,37	1,69	1,99	2,01	2,08	2,18	2,26	2,36
w/k.	1 700°	1 500°	1 300°	1 600°	1 700°	1 600°	1 600°	1 555°

E.W. Gorter a montré [8] que le ferrite de magnésium se comportait d'une manière analogue. De la même façon, il faut sans doute admettre que le ferrite de zinc ne soit pas tout à fait normal et qu'il contienne en proportions variables suivant la nature du traitement thermique, des ions Zn^{++} sur les sites B. C'est sans doute dans cet ordre d'idées qu'il faut rechercher l'interprétation des variations considérables de la susceptibilité du ferrite de zinc, observées par L. Bochirol et R. Pauthenet [10], suivant qu'il est recuit ou trempé.

6. Moment à saturation des ferrites mixtes.

L'étude des ferrites mixes Fe_2O_3, xZnO, $(1-x)$MO a fourni également des résultats fort intéressants. Dans un ferrite pur inverse Fe_2O_3MO, remplaçons un atome M par un atome de zinc. Si m est le moment de M, il se produit d'abord une variation de moment égale à $-m$, puisque le moment de l'ion Zn^{++} est nul. Mais l'ion Zn va se placer en A, tandis que l'ion M était placé en B : le remplacement est donc accompagné du passage d'un ion Fe^{+++} d'un site A à un site B. Dans ce passage, le moment de l'ion Fe, égal à $5\mu_B$, doit se retourner, d'où une variation de moment égal à $10\mu_B$. Au total, le remplacement d'un atome M par un atome Zn produit donc une variation de moment égale à $(10-m)\mu_B$. On en déduit que la tangente initiale à la courbe $M_s = f(x)$, représentant la variation avec la concentration du moment moléculaire à saturation, qui part de $M_s = m$ pour $x = 0$, doit s'extrapoler vers 10 magnétons de Bohr, pour $x = 1$, c'est-à-dire pour le ferrite de zinc pur. E. W. Gorter [8] a constaté qu'il en était effectivement ainsi en prenant successivement Mn, Fe, Co, Ni, Cu, Li pour jouer le rôle de M.

La figure 4, tracée d'après les valeurs de C. Guillaud [9] et de E. W. Gorter [8] permet de comparer l'expérience à la théorie, dans le cas des ferrites mixtes de nickel et de zinc : la tangente initiale théorique est la droite AB. Lorsque x dépasse 0.3, la courbe M_s s'écarte notablement de la tangente initiale et le moment observé devient plus petit que le moment prévu. Nous expliquerons plus loin ce phénomène (§ 12).

Il a été question plus haut du ferrite de lithium : c'est un cas assez exceptionnel. Comme l'a montré E. W. Gorter [8], tout se passe comme si deux ions M^{++} d'un ferrite ordinaire étaient remplacés l'un par un ion Li^{+}, l'autre par un ion Fe^{+++}, de sorte que la

neutralité électrique est conservée. L'ion Li^{+} étant dépourvu de moment magnétique, on prévoit pour la molécule Fe_2O_3, $\frac{1}{2}$ FeO, $\frac{1}{2}$ LiO un moment magnétique de $2{,}5\mu_B$ conformément à l'expérience.

7. Extension de la théorie du champ moléculaire aux ferrites.

Il s'agit maintenant d'étudier l'influence de la température sur les propriétés fondamentales des ferrites : aimantation spontanée et susceptibilité au-dessus du point de Curie. Signalons d'abord

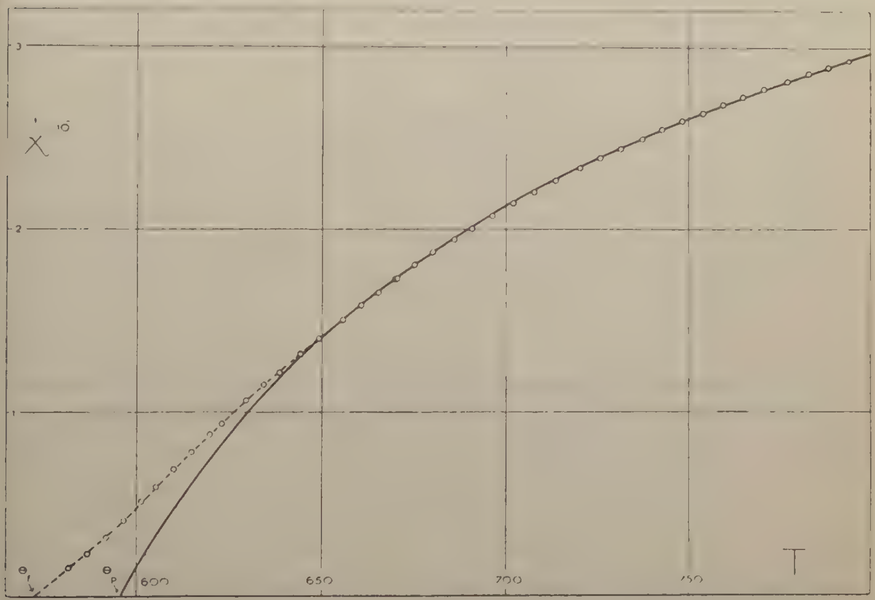


Fig. 2.

l'extrême difficulté du problème en précisant que, dans un ferrite pur où deux sortes différentes d'atomes se répartissent sur deux catégories de sites, il faut introduire 9 intégrales d'échange différentes et que, dans les ferrites mixtes, avec trois sortes d'atomes, il faut en introduire 18 ; de plus, parmi ces atomes, il y en a dont le spin résultant est grand, par exemple 5/2 pour Fe^{+++}. Si l'on songe que, dans les ferromagnétiques ordinaires, le problème le plus simple, celui des atomes de spin 1/2 avec une seule intégrale d'échange,

n'est pas encore résolu d'une manière satifaisante, on conviendra de la nécessité d'introduire ici des simplifications radicales. Pour cela, nous avons généralisé l'hypothèse du champ moléculaire de Weiss, en reprenant une méthode que nous avions jadis utilisée dans l'étude des solutions solides binaires [14].

Désignons respectivement par $\overrightarrow{M_a}$ et $\overrightarrow{M_b}$ les aimantations, rapportées à une molécule-gramme, des ions situés sur les sites A et les sites B ; nous supposons que l'action, sur un ion quelconque placé en A, de ses voisins situés en A et en B est équivalente à un champ moléculaire $\overrightarrow{H_a}$, fonction linéaire de M_a et de M_b :

$$\overrightarrow{H_a} = n(\alpha \overrightarrow{M_a} - \overrightarrow{M_b}). \tag{3}$$

Nous remplaçons de même les actions sur un ion placé en B par un champ moléculaire $\overrightarrow{H_b}$ tel que

$$\overrightarrow{H_b} = n(\beta \overrightarrow{M_b} - \overrightarrow{M_a}). \tag{4}$$

Les trois coefficients de champ moléculaire $-n$, $n\alpha$, $n\beta$ définissent ainsi les interactions AB, AA et BB. L'hypothèse fondamentale énoncée dans le paragraphe 2, se traduit ici en disant que n est essentiellement positif tandis que α et β sont petits devant l'unité.

Désignons alors par C_a et C_b les constantes de Curie, au sens ordinaire du terme, des ions magnétiques situés en A et en B, on trouve alors que la susceptibilité moléculaire χ_M est donnée dans la région paramagnétique par la formule

$$\frac{1}{\chi_M} = \frac{T}{C} + \frac{1}{\chi_0} - \frac{\sigma}{T-\theta} \tag{5}$$

où les trois constantes χ_0, σ, θ sont reliées aux coefficients de champ moléculaire par les relations

$$\frac{C^2}{\chi_0} = n(2C_aC_b - \alpha C_a^2 - \beta C_b^2), \tag{6}$$

$$\sigma C^3 = n^2 C_a C_b [(1+\alpha)C_a - (1+\beta)C_b]^2, \tag{7}$$

$$\theta C = n C_a C_b (2 + \alpha + \beta), \tag{8}$$

avec

$$C = C_a + C_b. \tag{9}$$

L'expérience montre précisément que la susceptibilité des ferrites est représentable par une formule du type [5], avec une précision de quelques millièmes, pouvu que les points situés au voisinage du point de Curie soient exclus, tandis qu'elle est en désaccord complet avec la loi du paramagnétisme à champ moléculaire

$$\frac{1}{\chi_M} = \frac{T}{C_a + C_b} - n \qquad (10)$$

de Curie-Weiss. La figure 2 permet de juger les résultats obtenus, pour la magnétite Fe_2O_3FeO, d'après les mesures de Kopp [15]. On trouve des résultats analogues pour les ferrites de magnésium, de plomb, de cadmium, de nickel [5].

8. **Influence des fluctuations du champ moléculaire.**

La figure 2 montre qu'au voisinage du point de Curie la susceptibilité, calculée d'après la formule [5], ajustée à haute température, s'écarte de plus en plus de la courbe expérimentale, de manière telle que le point de Curie paramagnétique θ_p, c'est-à-dire la température à laquelle la susceptibilité devient infinie d'après la formule [5], est situé au-dessus du point de Curie ferromagnétique θ_f, défini comme le point d'apparition des propriétés ferromagnétiques : la différence $\theta_p - \theta_f$ est de l'ordre de 50 à 100 degrés. Les ferromagnétiques métalliques présentent le même phénomène (16) avec des différences $\theta_p - \theta_f$ qui sont du même ordre de grandeur : 20° pour le nickel, 50° pour le fer. Cette différence est due aux fluctuations du champ moléculaire et elle traduit simplement le fait que l'approximation du champ moléculaire devient mauvaise au voisinage du point de Curie : il n'y a donc rien d'étonnant à la retrouver chez les ferrites. L'intensité des fluctuations varie évidemment en raison inverse du nombre des voisins ; elles seront donc plus grandes dans les ferrites, où par exemple un

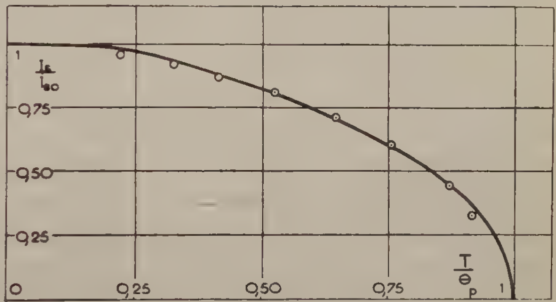


Fig. 3.

atome situé en A ne possède que 4 voisins A, que dans le nickel où chaque atome possède 12 voisins. Dans les ferrites mixtes contenant du zinc, où les ions magnétiques sont dilués par des ions non magnétiques, elles doivent devenir encore plus grandes : l'expérience montre en effet qu'il n'est plus possible de représenter la susceptibilité magnétique de la substance par une formule du type (5).

9. Variation thermique de l'aimantation spontanée.

Nous avons montré antérieurement (5) comment calculer les aimantations spontanées partielles $\overrightarrow{M_{as}}$ et $\overrightarrow{M_{bs}}$ des deux sous-réseaux en fonction de la température, connaissant les coefficients de champ moléculaire n, α et β ; l'aimantation spontànée observable est égale à la somme géométrique $\overrightarrow{M_{as}} + \overrightarrow{M_{bs}}$. On peut ainsi interpréter les allures, variant beaucoup d'un ferrite à l'autre, que présente la variation thermique de l'aimantation spontanée de ces corps, allures d'ailleurs très différentes de celles des ferromagnétiques métalliques. Pour la magnétite, la théorie remporte un succès significatif car les mêmes valeurs des coefficients de champ moléculaire permettent de rendre compte en même temps des propriétés au-dessus et au-dessous du point de Curie comme le montre la figure 3 où la courbe d'aimantation spontanée représentée en trait plein a été calculée d'après les valeurs de n, α, et β déterminées dans la région paramagnétique : l'accord avec les valeurs expérimentales de P. Weiss [17] est très bon.

TABLEAU II

SUBSTANCE	C	n	α	β
Fe_2O_3 ; FeO.	11,76	184	— 0,51	+ 0,01
Fe_2O_3 ; NiO.	9,76	240	— 0,21	— 0,15
Fe_2O_3 ; 0,8 NiO ; 0,2 ZnO.	9,56	235	— 0,48	— 0,16
Fe_2O_3 ; 0,4 NiO ; 0,6 ZnO.	9,16	284	— 1,16	— 0,15
Fe_2O_3 ; 0,3 NiO ; 0,7 ZnO.	9,06	413	— 3,08	— 0,14

Finalement, pour fixer les idées, le tableau II donne les valeurs des coefficients de champ moléculaire de la magnétite, du ferrite de nickel et d'un certain nombre de ferrites mixtes de nickel et de zinc : ces valeurs sont données à titre provisoire, pour fixer les idées, car

les mesures paramagnétiques sur lesquelles elles reposent [18] n'ont pas été poussées à une température suffisamment haute pour que la précision soit très bonne. La valeur de n est toujours rapportée à une molécule gramme.

On remarquera que dans les ferrites mixtes de nickel et de zinc, les valeurs de n et de β restent sensiblement indépendantes de la concentration, tandis que α décroît beaucoup quand la proportion de zinc augmente. Il convient d'attendre d'autres expériences avant d'interpréter ce phénomène.

10. L'énergie de désaimantation.

L'énergie d'aimantation E_m, par molécule gramme, s'écrit avec les mêmes notations que plus haut

$$E_m = -\frac{1}{2} n(\alpha M_{as}^2 + 2 M_{as} M_{bs} + \beta M_{bs}^2) \tag{11}$$

En appliquant cette formule à la magnétite, on obtient $-E_m = 2,2 . 10^{11}$ ergs environ. Cette énergie d'aimantation est accessible expérimentalement, par l'étude des anomalies de la chaleur spécifique, car il faut fournir l'énergie supplémentaire $-E_m$ à la substance pour l'amener à l'état paramagnétique. Des diverses mesures effectuées sur la magnétite (19), on peut conclure que cette énergie est de l'ordre de $1,5$ à $2,0 . 10^{11}$ ergs par molécule-gramme, en bon accord avec la valeur théorique. Au contraire, si nous considérions la magnétite comme un ferromagnétique ordinaire, à champ moléculaire positif, obéissant à la théorie de P Weiss [20] et contenant par molécule un ion magnétique à spin $S = 4/2$, on aurait

$$E_m = -\frac{n}{2}(4\mu_B)^2 \tag{12}$$

avec $n = \theta_f/C$, où la constante de Curie C est donnée par

$$C = \frac{4S(S+1)\mu_B^2}{3R}. \tag{13}$$

On trouve alors $-E_m = 0,75 . 10^{11}$ ergs, valeur qui est certainement au moins deux fois plus petite que la valeur expérimentale. Là aussi l'expérience est en faveur du caractère antiferromagnétique de la magnétite.

11. Les difficultés de la théorie.

Le même procédé, appliqué au ferrite de nickel, ne fournit pas d'aussi bons résultats, mais, il ne faut pas trop s'en étonner car les hypothèses de départ de la théorie sont vraiment si simplistes qu'il serait enfantin d'espérer un accord parfait avec l'expérience. En particulier, on traite en même temps les deux catégories différentes d'ions situés en B, en les remplaçant par une seule catégorie d'ions de moment magnétique moyen. Si un tel procédé donne de bons résultats pour la magnétite, où les ions Fe^{+++} et Fe^{++} possèdent des moments voisins, il n'est pas certain qu'il en soit de même pour le ferrite de nickel dans lequel le moment de l'ion Fe^{+++} est deux fois et demi plus grand que celui de l'ion Ni^{++}.

La variation thermique des coefficients de champ moléculaire, que nous avons négligée, peut être aussi une cause de désaccord. Nous avons en effet montré autrefois (21), en ce qui concerne les métaux ferromagnétiques, que les intégrales d'échange varient très rapidement avec la distance qui sépare deux atomes voisins, passant par exemple de zéro à la valeur maximum pour une variation de dix pour cent de cette distance. Par le simple effet de la dilatation, il faut s'attendre à une variation des coefficients de champ moléculaire de l'ordre de quelques dix-millièmes par degré. A cet effet de dilatation se superpose également un effet d'oscillation. Ces mêmes phénomènes doivent se reproduire dans les ferrites.

En particulier, si nous supposons que les coefficients de champ moléculaire sont des fonctions linéaires de la température, l'équation (5) garde la même forme mais la valeur des coefficients change. Par exemple, si nous posons

$$n = n_0(1 + \gamma T) \tag{14}$$

et si α et β restent constants, la nouvelle valeur C′ de C s'écrit

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_a + C_b} + \frac{\gamma}{\chi_0}. \tag{15}$$

La constante C′ n'est plus égale à la constante de Curie théorique. Malheureusement, pour l'instant, nous ignorons complètement la valeur de γ et il est difficile de dire si cette correction de variation thermique du champ moléculaire est importante.

12. Influence des fluctuations du champ moléculaire sur l'aimantation à saturation des ferrites mixtes de nickel et de zinc.

Les précisions que nous venons d'obtenir sur les valeurs numériques des coefficients de champ moléculaire permettent de reprendre la question de l'aimantation à saturation des ferrites mixtes de nickel

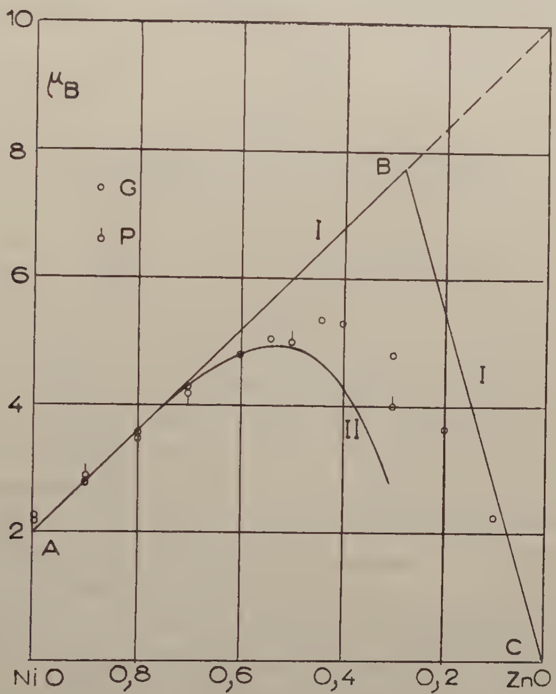


Fig. 4.

et de zinc, riches en zinc. Dans ces ferrites, les moments résultants M_{as} et M_{bs} des ions situés en A et en B sont donnés par les formules suivantes établies en prenant respectivement égaux à $5\mu_B$ et $2\mu_B$ les moments des ions Fe^{+++} et Ni^{++} :

$$M_{as} = 5(1 - x)\mu_B \tag{16}$$

$$M_{bs} = [5(1 + x) + 2(1 - x)]\mu_B \tag{17}$$

M_{as} diminue lorsque x croît, tandis que M_{bs} augmente. Un ion situé en B est soumis de la part des ions A à un champ moléculaire nM_{as} dirigé dans le sens de l'aimantation spontanée résultante et de la

part des ions B à un champ moléculaire $\beta n M_{bs}$ qui est négatif, puisque β est négatif. Quand x est voisin de 0, l'action du premier champ moléculaire l'emporte sur celle du second, de sorte que la saturation est normale : on a $M_s = M_{bs} - M_{as}$. Mais, avec $\beta = -0{,}155$, dès que x devient supérieur à 0.715, le champ négatif l'emporte sur le champ positif et la résultante M_b doit diminuer, par retournement du moment magnétique de quelques-uns des ions B, jusqu'à ce que ces deux champs soient égaux en valeur absolue, ce qui donne

$$-\beta n M_b = n M_{as} \tag{18}$$

on passe ainsi du type Q au type R d'aimantation (5). On trouve alors que dans cette région, la saturation M_s est donnée par la formule

$$M_s = -\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) M_{as} = -5(1 - x)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\mu_B. \tag{19}$$

Elle est simplement proportionnelle à $(1 - x)$. La droite BC de la figure 4 correspond à cette dépendance. Au total, la variation prévue est représentée par le contour en trait plein ABC tandis que les cercles représentent les points expérimentaux d'après Guillaud (G) et d'après E. W. Gorter (P). L'allure générale est respectée, mais le point anguleux est remplacé par un arrondi.

Il est facile de rendre compte de cette différence, car le raisonnement précédent suppose que tous les ions des sites B possèdent le même entourage moyen. Il n'en est rien, car un ion B, par exemple, n'est entouré que de 6 ions A : parmi ces 6 ions, il y a en moyenne $6(1 - x)$ ions Fe^{+++} magnétiques et $6x$ ions Zn^{++} qui ne sont pas magnétiques. Si nous supposons ces ions répartis au hasard, il y a une probabilité x^6 de ne trouver que des ions non magnétiques, sur les sites A, dans l'entourage d'un ion B. Cet ion B n'est donc soumis qu'au champ moléculaire de ses voisins B qui est négatif et qui va orienter le moment magnétique de l'ion en question en sens inverse de l'aimantation spontanée résultante. Un effet du même genre se produit lorsqu'il n'y a qu'un seul ion magnétique parmi les six voisins A d'un ion B : pour que la saturation de l'ion B soit franche, il faut qu'il y ait au moins 2 ions magnétiques parmi ces 6 voisins. Un calcul approché, développé sur ces bases fournit la courbe II de la figure 4. On voit que les points expérimentaux sont situés entre cette courbe II, qui tient compte des fluctuations dans la

répartition des voisins, et la courbe I (ABC) établie dans l'hypothèse d'une répartition moyenne.

Dans l'ensemble, la variation avec la concentration du moment à saturation des ferrites mixtes paraît interprétable d'une manière satisfaisante.

13. Preuves expérimentales de la décomposition en deux sous-réseaux du réseau cristallin des antiferromagnétiques.

Pour étudier théoriquement les propriétés magnétiques des substances à intégrales d'échange négatives, j'ai autrefois proposé [23] de subdiviser leur réseau cristallin en deux sous-réseaux A et B, identiques à une translation près, tels que tous les voisins, ou tout au moins le plus possible des voisins, d'un atome situé en A appartiennent au sous-réseau B et réciproquement. Dans ces conditions, les interactions négatives qui s'exercent entre A et B tendent à orienter antiparallèlement les moments de A et de B : à basse température, les moments de A sont tous parallèles et donnent une résultante M_a tandis que les moments de B, dirigés en sens inverse, donnent une résultante M_b. Comme les deux sous-réseaux sont égaux, $M_a = -M_b$ et l'aimantation résultante est nulle. On obtient en somme deux aimantations spontanées partielles, égales mais dirigées en sens inverse. L'action d'un champ magnétique extérieur H déforme légèrement cet assemblage antiparallèle et produit une aimantation proportionnelle à H : la substance est donc simplement paramagnétique. Les deux aimantations spontanées partielles disparaissent à une certaine température critique T_c au-dessus de laquelle la substance se comporte comme un paramagnétique à un champ moléculaire négatif obéissant à la loi classique de Weiss. La température caractéristique T_c se signale par une discontinuité de la dérivée de la susceptibilité magnétique par rapport à la température et par une discontinuité de la chaleur spécifique analogue à celle des ferromagnétiques. Cette théorie. successivement perfectionnée par Bitter [24] et Van Vleck [25], permet d'interpréter les propriétés magnétiques d'un certain nombre de substances, MnO, FeO, NiO, Fe_2O_3, etc., connues sous le nom d'*antiferromagnétiques*.

Cette décomposition du réseau cristallin en deux sous-réseaux a été quelquefois considérée par certains théoriciens comme un simple artifice de calcul ne correspondant à aucune réalité physique. Mais des expériences récentes de Shull et Smart [26], utilisant la diffrac-

tion des neutrons qui est sensible à l'orientation des spins, ont prouvé qu'il s'agit bien d'un phénomène réel. Par exemple, la dimension de la maille cristalline de MnO, mesurée aux neutrons au-dessous du point de transition, est double de celle mesurée aux rayons X, ce qui met directement en évidence l'espèce de surstructure due à l'ordonnance régulière des atomes de spin + et de spin —, jouant le rôle d'atomes de natures différentes : les atomes Mn sont disposés par couches successives perpendiculaires à l'axe ternaire, alternativement de spin + et de spin —. De même, dans le sesquioxyde de fer rhomboèdrique $Fe_2O_3\alpha$. SHULL et SMART on montré que les ions ferriques étaient rangés par couches successives, perpendiculaires à l'axe ternaire, alternativement de spin + et de spin —, conformément à la structure que j'avais antérieurement prévue d'après les propriétés magnétiques [27]. Les mêmes auteurs ont réussi à suivre l'évolution des aimantations spontanées partielles jusqu'au point de transition où elles s'annullent. Au-dessus de T_c, la surstructure disparaît. Ces expériences confirment ainsi remarquablement la théorie de l'antiferromagnétisme.

14. Antiferromagnétisme et ferrimagnétisme.

Il existe une analogie frappante entre la structure magnétique des ferrites et celle des antiferromagnétiques : dans les deux cas, les ions magnétiques sont partagés entre deux sous-réseaux entre lesquels agissent de puissantes interactions négatives qui créent à basse température des aimantations spontanées partielles orientées en sens inverses, mais, tandis que ces aimantations spontanées partielles sont égales et se détruisent dans les antiferromagnétiques, elle sont inégales dans les ferrites et donnent une résultante observable. Les ferrites sont donc des antiferromagnétiques imparfaits. Il paraît donc justifié de ranger les ferrites dans une catégorie spéciale, celle des *ferrimagnétiques*, pour les différencier des ferromagnétiques ordinaires dont ils se distinguent aussi bien du point de vue théorique que du point de vue expérimental, notamment au-dessus du point de Curie.

15. Interactions directes et indirectes.

L'étude des métaux et alliages ferromagnétiques a permis de montrer que l'énergie d'interaction entre les moments magnétiques, rapportée à des moments égaux à l'unité, se comporte en première

approximation comme une fonction Γ d'une seule variable : la plus courte distance e qui sépare les deux couches magnétiques des deux atomes inter-agissants. D'abord négative aux courtes distances, elle devient positive pour $e = 1{,}05$ Å, passe par un maximum pour $e = 1.3$ Å environ, puis décroît [28]. Lorsqu'on essaye d'étendre ces résultats aux antiferromagnétiques et aux ferrites, on se heurte à de graves difficultés. On constate d'abord que dans ces corps les distances mutuelles entre les ions magnétiques correspondent en général à des interactions positives, lorsqu'on se rapporte à la courbe Γ, tandis que l'interprétation des propriétés magnétiques exige, comme nous l'avons montré, des interactions négatives : il n'est pas davantage possible de mettre en évidence une autre relation entre les distances des ions et les valeurs des interactions. D'autre part, dans ces corps, les ions métalliques sont beaucoup plus petits que les ions d'oxygène qui les entourent. A priori les ions d'oxygène paraissent devoir empêcher les interactions : c'est ainsi que dans les ferrites, il résulte des propriétés magnétiques l'existence de très fortes interactions entre un ion placé sur un site A et un ion placé sur un site B, tandis que l'ion A se trouve dans la réalité séparé de l'ion B par un ion d'oxygène presqu'exactement placé suivant la ligne qui joint leurs centres.

Ces difficultés m'ont amené à supposer que les interactions magnétiques étaient susceptibles de se produire par l'intermédiaire des ions d'oxygène les séparant et jouant un rôle actif : ce serait en somme le superéchange autrefois étudié par KRAMERS [29]. Il y aurait alors dans les antiferromagnétiques et les ferrites deux catégories d'interaction entre les ions magnétiques : 1) des interactions ordinaires d'échange, du type direct, que nous symbolisons par la notation M — M, et qui par comparaison avec les métaux ferromagnétiques, seraient vraisemblablement positives ; 2) des interactions indirectes de superéchange, par l'intermédiaire des atomes d'oxygène, symbolisées par la notation M — O — M et essentiellement négatives.

16. La structure de $Fe_2O_3\alpha$, preuve de l'existence d'interactions indirectes.

L'étude de la structure magnétique de certains antiferromagnétiques confirme cette manière de voir. Prenons comme exemple celle de $Fe_2O_3\alpha$ et supposons d'abord qu'il n'existe que des interactions directes Fe — Fe négatives. Comme il est possible de partager les

atomes de fer en deux sous-réseaux tels que les 4 voisins d'un atome de fer d'un des sous-réseaux appartiennent tous à l'autre sous-réseau, les deux sous-réseaux vont évidemment s'aimanter en sens inverse, comme le montre la maille élémentaire représentée sur la figure 5B. Au contraire, si il existe des interactions négatives indirectes Fe — O — Fe superposées à des interactions directes Fe — Fe positives, on montre aisément que la disposition la plus stable correspond à des couches de fer successives, perpendiculaires à l'axe ternaire,

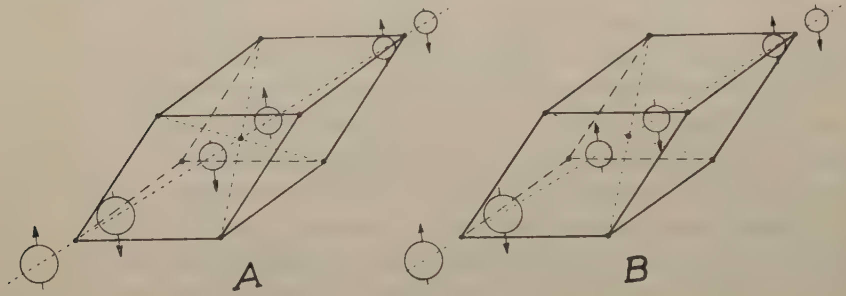


Fig. 5.

séparées les unes des autres par des plans d'oxygène et aimantées alternativement dans un sens et dans le sens opposé. Dans cette disposition, représentée par la maille élémentaire de la figure 5A, chaque atome de fer possède 3 voisins dont le spin est parallèle au sien et 1 voisin à spin antiparallèle. C'est cette dernière disposition qui m'avait parue la plus probable [27] compte tenu des propriétés de l'ensemble des antiferromagnétiques et des ferrimagnétiques. Si on fait diffracter sur le réseau une onde sensible à l'orientation des spins, il est visible que la maille centrée A ne donnera pas de réflexion (111) tandis que la maille B en donnera une : c'est ainsi qu'en utilisant des neutrons Smart et Shull ont montré [30] que la deuxième structure B était bien la structure correcte, ce qui apporte un argument très direct en faveur de l'existence des interactions indirectes Fe — O — Fe. L'étude de MnO aux neutrons conduit à des conclusions identiques.

(Manuscrit reçu en février 1950.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. L. Snoek, *Physica*, 1936, *3*, 463; *New developments in Ferromagnetic Materials*, Elsevier, Amsterdam, 1947.

[2] A. Serres, *Ann. de Physique*, 1932, *17*, 53.

[3] T. F. W. Barth et E. Posnjak, *Z. Krist.*, 1932, *82*, 325.

[4] E. J. W. Verwey et E. L. Heilmann, *J. Chem. Physics*, 1947, *15*, 174,

[5] L. Néel, *Ann. de Physique*, 1948, *3*, 137.

[6] L. Néel, *C. R. Ac. Sc.*, 1950, *230*, 190.

[7] P. Weiss et R. Forrer, *Ann. de Physique*, 1929, *12*, 279.

[8] E. W. Gorter, *C. R. Ac. Sc.*, 1950, *230*, 192; *Nature* (London), sous presse.

[9] C. Guillaud, *C. R. Ac. Sc.*, 1949, *229*, 1133.

[10] Travaux encore inédits du Laboratoire d'Electrostatique et de Physique du Métal à Grenoble.

[11] J. R. Bickford, *Phys. Rev.*, 1949, *76*, 137.

[12] H. G. Beljers et D. Polder, *Nature* (London), sous presse.

[13] G. Foëx, *Réunion Internationale sur le Magnétisme*, Strasbourg, 1939.

[14] L. Nèel, *Annales de physique*, 1932, *17*, 61; *C. R. Ac. Sc.*, 1934, *198*, 1311.

[15] W. Kopp, *Thèse*, Zürich, 1919.

[16] L. Néel, *Annales de Physique*, 1932, *17*, 5.

[17] P. Weiss, *J. de Physique*, 1907, *6*, 661.

[18] L. Néel et P. Brochet, *C. R. Ac. Sc.*, 1950, *230*, 280.

[19] Cf. pour la bibliographie, Pascal, *Traité de Chimie Minérale*, t. IX.

[20] P. Weiss et G. Foëx, *Le Magnétisme*, Paris, A. Colin.

[21] L. Néel, *C. R. Ac. Sc.*, 1936, *202*, 742, 1936, *202*, 1038; *Comm. Soc. Franc. de Phys.*, 1936, Bull. n° 385, p. 45 S; Bull. n° 387, p. 70 S; *Ann. de Physique*, 1937, *8*, 237.

[22] L. Néel, *C. R. Ac. Sc.*, 1950, *230*, 375.

[23] L. Néel, *C. R. Ac. Sc.*, 1936, *203*, 304; voir aussi : L. Néel, *Ann. de Phys.*, 1932, *17*, 5 et *Ann. de Phys.*, 1936, *5*, 232.

[24] F. Bitter, *Phys. Rev.*, 1938, *54*, 79.

[25] J. H. Van Vleck, *J. Chem. Phys.*, 1941, *9*, 85.

[26] C. G. Shull, et J. S. Smart, *Phys. Rev.*, 1949, *76*, n° 8 (15 octobre).

[27] L. Néel, *Ann. de Physique*, 1948, *3*, 137; 1949, *4*, 249.

[28] L. Néel, *Ann. de Physique*, 1936, *5*, 232; 1937, *8*, 237; *Réunion Internationale sur le Magnétisme*, Strasbourg, 1939.

[29] H. A. Kramers, *Physica*, 1934, *1*, 182.

[30] Communication personnelle que je dois à l'obligeance de M. C. G. Shull.

IMP. LOUIS-JEAN — GAP

Dépôt légal n° 235 — 1962

ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER